◀1998 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　この三角形の斜辺の長さを r で表せ．

(2)　r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ．

2　$f(x) = x^2 + 7$ とおく．

(1)　n は 3 以上の自然数で，ある自然数 a に対して $f(a)$ は 2^n の倍数になっているとする．このとき $f(a)$ と $f(a+2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ．

(2)　任意の自然数 n に対して $f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ．

3　四面体 OABC の辺 OA 上に点 P，辺 AB 上に点 Q，辺 BC 上に点 R，辺 CO 上に点 S をとる．これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき，この平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ．

4　a, m は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 (a, m) を頂点とし，原点と点 $(2a, 0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである．

5　袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている．各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1, 2, 3 の番号がついている．これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す．取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする．たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　得点が n になるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0), A(1), A(2), A(3)$ を求めよ．

(2)　得点の期待値を求めよ．

6　a を $0 < a < 1$ を満たす定数として，曲線 $y = \log(x-a)$ と x 軸と 2 直線 $x=1, x=3$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする．

(1)　$V(a)$ を求めよ．

(2)　a の値が $0 < a < 1$ の範囲で変化するとき，$V(a)$ の最小値を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とする．

(1)　三角形 OAP の面積を x で表せ．

(2)　P が辺 BC 上を動くとき三角形 OAP の面積の最小値を求めよ.

3　a, b は実数で $a \fallingdotseq b,\ ab \fallingdotseq 0$ とする．このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$$

を満たす実数 x の範囲を求めよ.

4　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a<b)$ をとり，線分 AB と放物線で囲まれ
た t が $a<t<b$ の範囲を動くときの $S(\mathrm{P})$ の最大値を S とするとき，s と S の比を求めよ.

5　理系学部 **5** と同じ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　基本　I 三角比

2　標準　A 整数問題

3　標準　B ベクトル（空間）

4　標準　III 数列の極限

5　標準　I 確率

6　標準　III 微分法とその応用・積分法とその応用

♣ 文系学部

1　標準　I 三角比

2　標準　I 三角比・B ベクトル（空間）

3　標準　I 不等式

4　基本　II 微分積分

5　標準　I 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $1-2r$

(2) $\dfrac{1}{8}$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

3 証明は省略

4 $\dfrac{4a^2-1}{4a^2}$

5 (1) $A(0)=42,\quad A(1)=36,\quad A(2)=0,\quad A(3)=6$

(2) $\dfrac{9}{14}$

6 (1)
$$V(a)=\pi\big[(3-a)\{\log(3-a)\}^2-(1-a)\{\log(1-a)\}^2 \\ -2(3-a)\log(3-a)+2(1-a)\log(1-a)+4\big]$$

(2) $\pi\big[2\{\log(1+\sqrt{2})\}^2-4\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})+4\big]$ （$a=2-\sqrt{2}$）

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ．

2 (1) $\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-x+\dfrac{3}{4}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \left(x=\dfrac{1}{2}\right)$

3
$$\begin{cases} ab>0,\ |a|>|b| \text{ のとき，} & x<-|a|,\quad -|b|<x<|b|,\quad |a|<x \\ ab>0,\ |a|<|b| \text{ のとき，} & -|b|<x<-|a|,\quad |a|<x<|b| \\ ab<0,\ |a|>|b| \text{ のとき，} & x<-|a|,\quad -\sqrt{-ab}<x<-|b|,\quad |b|<x<\sqrt{-ab},\quad |a|<x \\ ab<0,\ |a|<|b| \text{ のとき，} & -|b|<x<-\sqrt{-ab},\quad -|a|<x<|a|,\quad \sqrt{-ab}<x<|b| \\ ab<0,\ |a|=|b| \text{ のとき，} & \text{解なし} \end{cases}$$

4 $s:S=4:3$

5 理系学部 **5** と同じ．