◀1996 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる．同じ円上の点 X に対し，平面上の点 Y を $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ で定める．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積である．このとき

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|=1$ であることを示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 X をすべて求めよ．

(3)　点 X が円 C を 1 回まわるとき，点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ．

2 xyz 空間の 3 点 A$(1,\,0,\,0)$, B$(0,\,1,\,0)$, C$(0,\,0,\,1)$ と，$z=0$ で表される平面上の直線 l ：$x+y=0$ の上を動く点 P$(t,\,-t,\,0)$ を考える．点 A を通り，直線 l に垂直な平面を α とする．$t>\dfrac{1}{2}$ のとき，4 面体 ABCP と平面 α が交わってできる図形の面積 $S(t)$ の最大値を求めよ．

3 平面上の 1 次変換 f に対し，$f(\vec{v})\neq\vec{v}$ かつ $f^3(\vec{v})=\vec{v}$ となるベクトル $\vec{v}$ が存在するならば，f^3 は恒等変換であることを示せ．ただし $f^3=f\circ(f\circ f)$ である．

4 与えられた自然数 k に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\quad a_n=\left[\frac{a_{n-1}+k}{3}\right]\ (n\geqq 2)$$

によって定める．ただし実数 t に対し $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す．

(1)　$k=8$ および $k=9$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対し，次の 2 つの不等式

$$a_n\leqq\frac{k-1}{2},\quad a_n\leqq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$a_n=a_{n+1}$ ならば，n 以上のすべての整数 m に対し $a_n=a_m$ であることを示し，このときの a_n の値を求めよ．

5 xy 平面上の正三角形 $\triangle$ABC を考える．$\triangle$ABC の重心は原点 O にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の長さは 1 とする．$\triangle$ABC の内部または辺上の点 P_0 に対し，3 頂点 A, B, C から 1 点を等確率 $\dfrac{1}{3}$ で選び，この頂点と P_0 の中点を P_1 とする．次に点 P_1 に対して同様の操作を行い得られた点を P_2 とし，以下この操作を繰り返して，点 P_3, P_4, $\cdots$, P_n を作る．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ の長さの 2 乗 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right|^2$ の期待値を E_n とおく．

(1)　E_1 をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ の長さを用いて表せ．

(2)　選んだ頂点が X_1, X_2, $\cdots$, X_n のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}$, $i=1,\,2,\,\cdots,\,n$, を用いて表せ．

(3)　P_0 が原点 O のとき E_n を求めよ．

6 ガソリンを x kg 積んだ状態で時速 v km で走るとき，毎時 $\dfrac{100+x}{100}e^{kv}$ kg のガソリンを消費する車がある．ここで k は正の定数である．この車を用いて 100 km 離れた地点へ一定速度で行くとき，ガソリンの消費量を最小にするには，最初に積むガソリンの量と走行速度をどのようにすればよいか．ただし，ガソリンが無くなれば車は直ちに停止するものとする．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　$0<a \leqq b$ をみたす実数 a, b に対し，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1=a,\quad b_1=b,\quad a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\quad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\quad (n \geqq 2)$$

によって定める．

(1)　すべての自然数 n に対し，$a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての自然数 n に対し，$b_{n+1}-a_{n+1} \leqq \dfrac{1}{8a_n}(b_n-a_n)^2$ が成り立つことを示せ．

(3)　$a=100, b=900$ のとき，$b_n-a_n<4$ をみたす最小の n を求めよ．

3　各成分が 0 以上の整数である行列 A で，$A^3=A$ をみたすものをすべて求めよ．

4　正の実数 a に対し，実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_{-2}^{2}|x-t|(t^2-a^2)\,dt$$

で定める．このとき，$g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ．また a がそのような範囲にあるとき，$g(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

5　点 O を中心とする円周の 6 等分点を $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_6$ とする．サイコロを 3 回振り，出た目が順に i, j, k のときの得点を次のように定める．i, j, k の中に同じものがあれば 0 点とする．i, j, k がすべて異なるときは，円の中心 O が三角形 $\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ の内部にあれば 3 点，辺上にあれば 2 点，外部にあれば 1 点とする．得点の期待値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　代幾　ベクトル

2　標準　Ⅰ　図形と方程式・代幾　空間図形

3　標準　代幾　1 次変換

4　やや難　基解　数列

5　やや難　代幾　ベクトル・基解　数列・確統　確率

6　やや難　微積　微分方程式

♣ 文系学部

1　標準　代幾　ベクトル

2　やや難　基解　数列

3　標準　代幾　行列

4　標準　基解　微分積分

5　標準　確統　確率

略解

◇ 理系学部

1 （1） 証明は省略

（2） A または O に関して A と対称な点

（3） 証明は省略

2 $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$

3 証明は省略

4 （1）

$$\begin{cases} k=8 \text{ のとき，} & a_1=0,\ a_2=2,\ a_n=3\ (n \geqq 3) \\ k=9 \text{ のとき，} & a_1=0,\ a_2=3,\ a_n=4\ (n \geqq 3) \end{cases}$$

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略, $\begin{cases} k \text{ が奇数のとき，} & a_n=\dfrac{k-1}{2} \\ k \text{ が偶数のとき，} & a_n=\dfrac{k-2}{2} \end{cases}$

5 （1） $E_1=\dfrac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right|^2+1\right)$

（2） $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\dfrac{1}{2^n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}+\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}\right)$

（3） $E_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$

6

$$\begin{cases} \text{走行速度} & v=\dfrac{1}{k}\ (\mathrm{km/h}) \\ \text{最初に積むガソリンの量} & 100(e^{ek}-1)\ (\mathrm{kg}) \end{cases}$$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ.

2 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） $n=4$

3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

k は 0 以上の任意の整数

4 $0<a \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，　最小値 ： $-\dfrac{3}{2}a^4-4a^2+8$

5 1