◀2015 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

✎注：医学部（医）は，**1**〜**4** 必答．理学部・工学部・薬学部・医学部（保技）は，**5**, **2**, **6**, **7** 必答．

1　△ABC の 3 辺の長さを BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$ とし，条件

$$a + b + c = 1,\quad 9ab = 1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1)　a の値の範囲を求めよ．

(2)　$\theta = \angle \mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ．

2　p, q, r を実数とする．空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$, $\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ．ただし，O を原点とする．

(1)　p は 1 でも -1 でもないことを示せ．

(2)　q, r を p を用いて表せ．

(3)　p', q', r' を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$, $\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p', q', r' を p を用いて表せ．

(4)　(3) における 3 点 A′, B′, C′ は一直線上にないことを示せ．

3　a と b を正の実数とする．△ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$\mathrm{BX}_1 = a$, $\mathrm{CX}_1 = b$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする．

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　l_1 を a, b を用いて表せ．

(2)　l_{n+1} を l_n, a, b を用いて表せ．

(3)　$b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ．必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい．

4　r を正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ．

(4)　(3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ．

5　$f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする．2 つの異なる実数 α, β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(\alpha), f(\beta)$ を α, β を用いて表せ．

(2)　不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ．

6　$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$\mathrm{BX}_1 = 1$, $\mathrm{CX}_1 = 8$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする．

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　l_1 を求めよ．

(2)　l_{n+1} を l_n を用いて表せ．

(3)　$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ．必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい．

7　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

♠ 文系学部・教育・医（保看）

1　a を実数とする．曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を ℓ とする．曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　ℓ と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(2)　$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする．曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は ℓ によって 2 つの部分に分けられる．これらのうち，点 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ．

2　座標空間内の 3 点 A$(1, 1, 1)$, B$(3, 0, 1)$, C$(1, 2, 0)$ を含む平面を H とする．以下の問いに答えよ．

(1)　点 P$(-3, 2, 2)$ は H 上の点であることを示せ．

(2)　点 Q$(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ．

3　$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする．点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする．また，$\mathrm{BX}_1 = 1$, $\mathrm{CX}_1 = 8$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して以下の操作を行う．

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする．また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする．点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする．

線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ．

（1）　l_1 を求めよ．

（2）　l_{n+1} を l_n を用いて表せ．

（3）　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ．

4　理系学部 **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　|やや難|　III 微分法の応用

2　|標準|　B ベクトル（空間）

3　|やや難|　B 数列

4　|やや難|　III 積分法の応用

5　|標準|　II 微分積分

6　|標準|　B 数列

7　|標準|　III 積分法の応用

♣ 文系学部

1　|標準|　II 微分積分

2　|基本|　B ベクトル（空間）

3　|標準|　B 数列

4　|標準|　II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\dfrac{2}{9} < a < \dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta < 1$

2 (1) 証明は省略

(2) $q = \dfrac{-p+3}{p+1}$,　$r = \dfrac{p+1}{p-1}$

(3) $p' = \dfrac{-2}{p+1}$, $q' = \dfrac{(p+1)(p-2)}{-2p+2}$,　$r' = \dfrac{-p^2-2p+3}{p+1}$

(4) 証明は省略

3 (1) $l_1 = \dfrac{a}{a+b}$

(2) $l_{n+1} = 1 - \dfrac{b}{a+b}l_n$

(3) $n = 25$

4 (1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{1+r^2}e^{-nr\pi}(e^{-r\pi}+1)$

(2) $a_n = \dfrac{(e^{-r\pi}+1)(1-e^{-nr\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$

(3) $\dfrac{e^{-r\pi}+1}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}$

(4) $\dfrac{2}{\pi}$

5 (1) $f(\alpha) = -\dfrac{1}{2}\alpha^3 + \dfrac{3}{2}\alpha^2\beta$,　$f(\beta) = -\dfrac{1}{2}\beta^3 + \dfrac{3}{2}\alpha\beta^2$

(2) 1 個

6 (1) $l_1 = \dfrac{1}{9}$

(2) $l_{n+1} = 1 - \dfrac{8}{9}l_n$

(3) $n = 25$

7 (1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}e^{-n\pi}(e^{-\pi}+1)$

(2) $a_n = \dfrac{(e^{-\pi}+1)(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}$

(3) $\dfrac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})}$

◇ 文系学部

1　(1)　$\dfrac{4}{3}$

　(2)　$\dfrac{2}{3}+\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

2　(1)　証明は省略

　(2)　$(3,\ 1,\ 0)$

3　(1)　$l_1=\dfrac{1}{9}$

　(2)　$l_{n+1}=1-\dfrac{8}{9}l_n$

　(3)　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

4　理系学部 **5** と同じ.