# ◀2014 年　熊本大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**注：**医学部（医）は，**1**～**4** 必答．理学部・工学部・薬学部・医学部（保技）は，**5**, **2**, **6**, **7** 必答．

**1**　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，OA の中点を P とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$0<t<1$ に対し，BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．また，PM＋MQ が最小となる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ $t$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　△QMN の面積を $t$ を用いて表せ．

(3)　$t$ が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ．

**2**　$a$ を正の定数とする．条件

$$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta,\quad 0<\theta<\pi$$

を満たす $\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　条件を満たす $\theta$ は，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ．

(2)　条件を満たす $\theta$ の個数を求めよ．

**3**　以下の問いに答えよ．

(1)　正の実数 $a, b, c$ について，不等式

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}<\log 4$$

が成立することを示せ．ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい．

(2)　自然数 $a, b, c, d$ の組で

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc},\qquad a\leqq b\leqq c,\qquad d\geqq 3$$

を満たすものをすべて求めよ．

**4**　$a$ を $a>2$ である実数とする．$xy$ 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の $x$ 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を $a$ を用いて表せ．

(2)　$C$ と $x$ 軸，および 2 直線 $x=\alpha$, $x=\beta$ で囲まれた領域を $S$ とする．$S$ の面積を $a$ を用いて表せ．

(3)　$S$ を $x$ 軸の周りに回転して得られる立体の体積 $V$ を $a$ を用いて表せ．

**5**　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．また点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}-\vec{a}$ を満たす点，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}-\vec{a}$ を満たす点とし，点 P を OA の中点とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$0<t<1$ に対し，BD を $t:(1-t)$ に内分する点を R とし，CE を $(1-t):t$ に内分する点を S とする．また，OB と PR の交点を M とし，OC と PS の交点を N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ $t$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　△OMN の面積を $t$ を用いて表せ．

(3)　$t$ が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△OMN の面積の最小値を求めよ．

**6**　$r$ を $r>1$ である実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定める．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n+r^2}{a_n+1}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　$n$ が奇数のとき $a_n<r$, $n$ が偶数のとき $a_n>r$ であることを示せ．

(2)　任意の自然数 $n$ について，$a_{n+2}-r$ を $a_n$ と $r$ を用いて表せ．

(3)　任意の自然数 $n$ について，次の不等式を示せ．

$$\frac{a_{2n+2}-r}{a_{2n}-r}<\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}$ を求めよ．

**7**　$a$ を正の実数とする．$xy$ 平面上の曲線 $C: y=e^{ax}$ の接線で，原点を通るものを $\ell$ とし，$C$ と $\ell$ および $y$ 軸で囲まれた領域を $S$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$S$ を $x$ 軸の周りに回転して得られる立体の体積 $V_1$ を求めよ．

(2)　$S$ を $y$ 軸の周りに回転して得られる立体の体積 $V_2$ を求めよ．

(3)　$V_1=V_2$ となるときの $a$ の値を求めよ．

## ♠ 文系学部・教育・医（保看）

**1**　理系学部 **5** と同じ．

**2**　△ABC において，

$$\angle\mathrm{BAC}=\theta,\quad \mathrm{AB}=\sin\theta,\quad \mathrm{AC}=|\cos\theta|$$

とする．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{BC}^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(2)　△ABC の面積の最大値を求めよ．

**3**　放物線 $C: y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ が点 $\mathrm{P}(1,\ -2)$ と $\mathrm{Q}(5,\ 10)$ を通るとし，P, Q における $C$ の接線をそれぞれ $\ell$, $m$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$b$, $c$ をそれぞれ $a$ を用いて表せ．

(2)　$\ell$ と $m$ の交点の $y$ 座標が $-4$ であるとき，$a$, $b$, $c$ を求めよ．

(3)　(2) で求めた $a$, $b$, $c$ について，放物線 $C$ と $\ell$, $m$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

**4**　1 次関数 $f_n(x)=a_nx+b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする．

(i)　$f_1(x)=x$

(ii)　$f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x)=\displaystyle\int_1^x 6tf_n(t)\,dt$ を $x^2+x$ で割ったときの余りに等しい．

以下の問いに答えよ．

(1)　$n\geqq 1$ のとき，$a_{n+1}$, $b_{n+1}$ を $a_n$, $b_n$ を用いて表せ．

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ．

(3)　$n\geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

1 やや難 B ベクトル（空間）

2 やや難 III 微分法の応用

3 やや難 III 微分法の応用

4 やや難 III 積分法の応用

5 標準 B ベクトル（空間）

6 標準 III 数列の極限

7 標準 III 積分法の応用

### ♣ 文系学部

1 標準 B ベクトル（空間）

2 標準 II 三角関数・微分積分

3 標準 II 微分積分

4 標準 I 整数問題・II 微分積分・B 数列

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2t+1}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$

(2) $\triangle\mathrm{QMN}=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$

(3) 最大値：$\dfrac{\sqrt{3}}{16}\ \left(t=\dfrac{1}{2}\right)$

**2** (1) 証明は省略

(2)
$$\begin{cases} 0<a<2\sqrt{2}\ \text{のとき} & 1\ \text{個} \\ a=2\sqrt{2}\ \text{のとき} & 2\ \text{個} \\ 2\sqrt{2}<a\ \text{のとき} & 3\ \text{個} \end{cases}$$

**3** (1) 証明は省略

(2) $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 3,\ 3)$

**4** (1) $\tan\alpha=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\quad \tan\beta=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

(2) $\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}}$

(3) $V=2\pi\sqrt{a^2-4}$

**5** (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2t+1}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$

(2) $\triangle\mathrm{OMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4(2t+1)(3-2t)}$

(3) 最大値：$\dfrac{\sqrt{3}}{16}\ \left(t=\dfrac{1}{2}\right)$

**6** (1) 証明は省略

(2) $a_{n+2}-r=\dfrac{(r-1)^2(a_n-r)}{2a_n+r^2+1}$

(3) 証明は省略

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}=r,\quad \lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=r$

**7** (1) $V_1=\dfrac{\pi}{6a}(e^2-3)$

(2) $V_2=\dfrac{2\pi}{3a^2}(3-e)$

(3) $a=\dfrac{4(3-e)}{e^2-3}$

## ◇ 文系学部

**1**　理系学部 **5** と同じ.

**2**　(1)　最大値：$\dfrac{9+4\sqrt{3}}{9}$，最小値：$\dfrac{9-4\sqrt{3}}{9}$

(2)　最大値：$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

**3**　(1)　$b=-6a+3$，$c=5a-5$

(2)　$a=1$，$b=-3$，$c=0$

(3)　$\dfrac{16}{3}$

**4**　(1)　$a_{n+1}=2a_n-3b_n$，　$b_{n+1}=-2a_n-3b_n$

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto