◀2013 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

✏注：医学部（医）は，**1**〜**4** 必答．理学部・工学部・薬学部・医学部（保技）は，**5**, **6**, **3**, **7** 必答．

1　X, Y は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする．また，n を自然数とする．A 君，B 君が以下のルールで対戦する．

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする．出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする．

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける．ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする．

以下の問いに答えよ．

(1)　さいころを投げたとき，X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする．A 君が勝つ確率を求めよ．

(2)　A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 (X, Y) は何通りあるか．

2　O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1, 1, 1)$, B$(2, 1, -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ．

(2)　点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が最小となる C の座標を求めよ．

3　半径 1，中心角 $\theta\ (0 < \theta < \pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)$ を求めよ．

(2)　$0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ．

(3)　定積分

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta$$

を求めよ．

4　xy 平面上で，点 $(1, 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2)　a を正の数とする．円 $x^2 + y^2 = a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ．

5　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2)　a_n を n の式で表せ．

6　O を原点とする空間内の 2 点 $A(-1,1,1)$, $B(2,1,-2)$ に対して，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 k に対して，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ．

(2)　$1\leqq s+t\leqq 2$ を満たす実数 s, t に対して，$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 R からなる領域を E とする．このとき，領域 D と E の共通部分の面積を求めよ．

7　xy 平面上で，点 $(1,0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2)　円 $x^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ と C の交点の x 座標をすべて求めよ．さらに，交点の個数を求めよ．

♠ 文系学部・医（保看）

1　n を 3 以上の奇数として，次の集合を考える．

$$A_n=\left\{{}_n\mathrm{C}_1,\ \ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}\right\}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ．

(2)　${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ．

(3)　A_n 内の奇数の個数を m とする．m は奇数であることを示せ．

2　$f(x)$ を $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる 3 次関数で

$$\int_0^2 f'(x)\,dx=-5$$

を満たすものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

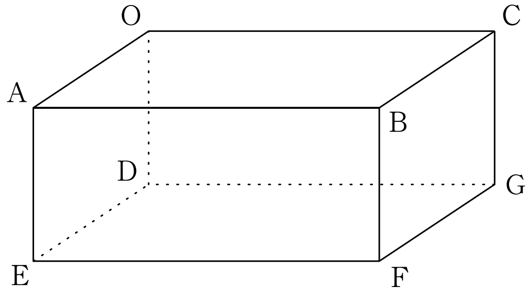
(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ．

3　直方体 OABC − DEFG において，OA = OD = 1，OC = 2 とし，辺 EF の中点を M とする．また，$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OD}\ (0\leqq t\leqq 1)$ とし，点 P から線分 CM におろした垂線と線分 CM との交点を H とする．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{PM}$ を $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}, t$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{PH}$ を $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}, t$ を用いて表せ．

(3)　$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PH}\right|^2$ の最小値を求めよ．



4　理系学部 **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 A 確率
2 やや難 B ベクトル（空間）
3 標準 III 微分法の応用・積分法
4 標準 II 図形と方程式
5 標準 B 数列
6 標準 B ベクトル（空間）
7 標準 II 図形と方程式

♣ 文系学部

1 やや難 I 2次関数・A 整数問題
2 基本 II 微分積分
3 標準 B ベクトル（空間）
4 標準 B 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\dfrac{p\{1-(1-p)^n(1-q)^n\}}{1-(1-p)(1-q)}$

(2) 371（通り）

2 (1) $\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3}{4}$

(2) $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{6}+2\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$

3 (1) $f(\theta) = \dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}$

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{\pi}{6} - 2 + 2\sqrt{2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

4 (1) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

(2) $\begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{4},\ a > 3 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ \dfrac{1}{4} < a < 2,\quad a = 3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 2,\quad \dfrac{9}{4} < a < 3 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ a = \dfrac{9}{4} \text{ のとき} & 5 \text{ 個} \\ 2 < a < \dfrac{9}{4} \text{ のとき} & 6 \text{ 個} \end{cases}$

5 (1) $a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1 \ (n \geqq 1)$

(2) $a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n \ (n \geqq 1)$

6 (1) $\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3}{4}$

(2) $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$

7 (1) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

(2) 5 個

◇ 文系学部

1 （1） 255

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

2 （1） $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-3$

（2） $\dfrac{27}{4}$

3 （1） $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}-t\vec{d}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$,　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+(1-t)\vec{d}$

（2） $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\dfrac{t+2}{3}\vec{a}+\dfrac{4-t}{6}\vec{c}+\dfrac{2-2t}{3}\vec{d}$

（3） 最小値 ： $\dfrac{12}{5}$

4 理系学部 **5** と同じ.