◀2007 年 熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 a を定数とする．2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \quad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) C_1, C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(2) C_1, C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ．

(3) C_1, C_2 の両方に接する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ．

2 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする．1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む．以下の問いに答えよ．

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ．

(2) さいころを n 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ．

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ．

3 行列 A の表す移動によって xy 平面上の点 $(0, 1)$, $(1, 2)$ はそれぞれ $(1, 1)$, $(2, 1)$ に移されるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A を求めよ．

(2) 曲線 $y = e^x$ 上を点 $\mathrm{P}(t, e^t)$ が動くとき，P がこの移動によって移る点の軌跡 C を求めよ．ただし，$-\infty < t < \infty$ とする．

(3) 曲線 D を $y = x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right)$ とする．ただし，$x < e + \dfrac{1}{e}$ である．2 つの曲線 C と D で囲まれる領域の面積を求めよ．

4 a を定数とする．方程式 $(\log x)^2 = ax$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 解の個数を調べよ．必要なら $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ．

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2, q^2 $(0 < p < q)$ とおく．q の値を求めよ．また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ．

♠ 文系学部

1 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする．1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む．以下の問いに答えよ．

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ．

(2) さいころを 4 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ．

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ．

2　四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\sqrt{10},\quad \mathrm{OB}=\sqrt{5},\quad \mathrm{OC}=\sqrt{6},\quad \mathrm{AB}=\sqrt{5},\quad \mathrm{AC}=2\sqrt{2},\quad \mathrm{BC}=\sqrt{5}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交することを示せ．

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ．

3　a を定数とする．2 つの放物線

$$C_1: y=-x^2,\quad C_2: y=3(x-1)^2+a$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　C_1, C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(2)　C_1, C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ．

4　数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする．

$$x_1=8,\quad y_1=-5$$

$$x_{n+1}=2x_n+y_n+3n-8\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$y_{n+1}=2y_n+x_n-3n+8\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1)　$z_n=x_n+y_n$，また $w_n=x_n-y_n$ とおく．数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　xy 平面上の点 (x_n, y_n) と直線 $y=x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　II 三角関数

2　標準　A 確率

3　標準　III 積分法とその応用

4　標準　III 微分法とその応用

♣ 文系学部

1　標準　A 確率

2　標準　B ベクトル（空間）

3　標準　II 三角関数

4　標準　B 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a > -\dfrac{3}{4}$

(2) $a = \dfrac{1}{3}$

(3) $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{3}$

2 (1) $\dfrac{5}{972}$

(2) $\dfrac{n!}{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2 \cdot 3^n \cdot 2^{\frac{n}{2}}}$

(3) $\dfrac{1}{3}$

3 (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $y = x - \log x$

(3) $\dfrac{4}{e}$

4 (1)

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 0,\ \dfrac{4}{e^2} < a \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = \dfrac{4}{e^2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 0 < a < \dfrac{4}{e^2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

(2) 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $\dfrac{5}{972}$

(2) $\dfrac{1}{54}$

(3) $\dfrac{1}{3}$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 4,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3$

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{5}{3}$

3 (1) $z_n = 3^n,\quad w_n = 3n^2 - 19n + 29$

(2) $n = 3,\ 4$