◀2004 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　円 $C_1 : x^2+y^2=1$ と円 $C_2 : (x-2)^2+(y-4)^2=5$ とに点 P から接線を引く．P から C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離との比が $1:2$ になるとする．このとき，P の軌跡を求めよ．

2　整数 m, n が $1 \leqq m < n$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x > 3$ ならば，不等式

$$(mx-1)(nx-1) > x^2+1$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$\tan\alpha = \dfrac{1}{m}, \tan\beta = \dfrac{1}{n}$ を満たし，かつ $\tan(\alpha+\beta)$ の値が整数となる角度 α, β があるとする．このような (m, n) の組をすべて求めよ．

3　次の問いに答えよ．

(1)　任意の自然数 n に対して，$x \geqq 0$ ならば，不等式

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　(1) の不等式を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ であることを示せ．

(3)　曲線 $y=xe^{-x}$ の点 (a, ae^{-a}) における接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれ P と Q とおく．ただし $a>1$ とする．線分 PQ の長さを $l(a)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} l(a)$ を求めよ．

4　楕円 $E : (x-1)^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，次の問いに答えよ．ただし b は正の定数とする．

(1)　E を表す極方程式を $r=f(\theta)$ とするとき，$f(\theta)$ を求めよ．

(2)　点 P が E 上を動くとする．原点 O と P との距離 OP が点 $(2, 0)$ 以外で最大となるための b の条件を求めよ．

(3)　b は (2) で求めた条件を満たすとし，OP が最大となる点における θ の値を θ_0 とおく．ただし $0<\theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，(1) で求めた $f(\theta)$ について，定積分

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta$$

の値を b の式で表せ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　複素数 α, β を $\alpha=1+2i, \beta=4+4i$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\left|\alpha-\overline{\beta}\right|$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す．

(2)　次の値を最小にする実数 x を求めよ．

$$|x-\alpha|+|x-\beta|$$

4 関数 $f(x)=x^2$, $g(x)=|2x^2-4|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 [II] 図形と方程式
- **2** 標準 [A] 整数問題
- **3** 標準 [III] 関数の極限・微分法の応用
- **4** やや難 [C] いろいろな曲線・[III] 積分法の応用

♣ 文系学部

- **1** 標準 [II] 図形と方程式
- **2** 標準 [A] 整数問題
- **3** 標準 [B] 複素数と複素数平面
- **4** 標準 [II] 微分積分

略解

◇ 理系学部

1　中心 $\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{77}}{3}$ の円

2　(1)　証明は省略

(2)　$(m,\ n) = (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)$

3　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} l(a) = 1$

4　(1)　$f(\theta) = \dfrac{2b^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

(2)　$b > \sqrt{2}$

(3)　$\displaystyle\int_0^{\theta_0} f(\theta)\,d\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\log\frac{b+\sqrt{b^2-2}}{b-\sqrt{b^2-2}}$ $\left(= \dfrac{b}{\sqrt{b^2-1}}\log\left(b^2-1+b\sqrt{b^2-2}\right)\right.$ でも可$\left.\right)$

◇ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　(1)　$\left|\alpha - \overline{\beta}\right| = 3\sqrt{5}$

(2)　$x = 2$

4　(1)　$x = \pm 2,\ \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2)　$\dfrac{32}{9}(3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$