◀2000 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　座標平面上の原点を O とし，点 A を $A(a,0)\ (a>0)$ とする．n を自然数とし，点 $P_n(x_n,y_n)$ を，直線 $y=nx$ 上にあり，$\angle OP_nA=60^\circ$ かつ $x_n>0$ となる点とするとき，y_n を求めよ．さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ．

2　$a>0,\ b>0$ とする．$ax^2+by^2=1$ をみたす負でない実数 x,y について，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b}\right\}$ の最大値と，そのときの x および y を求めよ．ただし，実数 X,Y に対して

$$\begin{cases} X\leqq Y \text{ のとき}\quad \min\{X,Y\}=X \\ X>Y \text{ のとき}\quad \min\{X,Y\}=Y \end{cases}$$

である．

3　$a>0,\ b>0$ とし，負の傾き k をもつ直線 $y=k(x-a^3)+b^3$ が x 軸と y 軸で切り取られる部分の長さの 2 乗を L とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　L を k,a,b を用いて表せ．

(2)　a,b を固定したとき，L の最小値 m とそのときの k の値を求めよ．

(3)　$m\leqq 1$ となるような座標平面上の点 (a,b) の範囲を図示せよ．

4　正の実数 $a,b\ (a>b)$ に対して，式

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}\qquad (-\pi\leqq t\leqq\pi)$$

で表される楕円について，次の問いに答えよ．

(1)　この楕円の長さ l は

$$l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k\cos^2 t}\,dt\quad \left(k=1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

であることを示せ．（積分の値は求めなくてよい．）

(2)　$\sqrt{1-k\cos^2 t}$ の，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値および最小値を求め，l と半径 a および半径 b の円周の長さの大小関係を調べよ．

(3)　$u\leqq 1$ のとき $\sqrt{1-u}\leqq 1-\dfrac{1}{2}u$ が成り立つことを用いて，$a=\dfrac{100}{\pi},\ b=\dfrac{99}{\pi}$ のとき，l が 199.005 以下になることを示せ．

♠ 文系学部

1　傾き $m\ (m>0)$ の直線 l が，放物線 $C:y=x^2$ と，異なる 2 点 $P(\sqrt{2},2)$ と Q で交わるとする．l が，Q における C の接線と直交するとき，次の問いに答えよ．

(1)　m の値を求めよ．

(2)　C と l で囲まれた図形の y 軸より右側の部分の面積を求めよ．

2　0 でない複素数 z に対して，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　w が実数となるための z のみたす条件を求め，この条件をみたす z 全体の図形を複素数平面上に図示

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

せよ．

(2)　w が実数で $1 \leqq w \leqq \dfrac{10}{3}$ をみたすとき，z のみたす条件を求め，この条件をみたす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ．

3　座標平面上の原点を O とし，点 A を $\mathrm{A}(a,\ 0)\ (a>0)$ とする．第 1 象限内の点 P を，正の傾き m $\left(m \fallingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をもつ直線 $y = mx$ 上にあり，$\angle\mathrm{OPA} = 60^\circ$ となる点とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle\mathrm{OAP} = \theta$ とするとき，$\tan\theta$ を m を用いて表せ．

(2)　P の y 座標を a と m を用いて表せ．

4　$a>0,\ b>0$ とする．$ax^2 + by^2 = 1$ をみたす負でない実数 $x,\ y$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{x}{a} \leqq \dfrac{y}{b}$ となるための x の範囲を求めよ．

(2)　$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b}\right\}$ の最大値と，そのときの x および y を求めよ．ただし，実数 $X,\ Y$ に対して

$$\begin{cases} X \leqq Y \text{ のとき} & \min\{X,\ Y\} = X \\ X > Y \text{ のとき} & \min\{X,\ Y\} = Y \end{cases}$$

である．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　II 図形と方程式・III 数列の極限
- **2**　標準　C いろいろな曲線
- **3**　標準　III 微分法の応用
- **4**　標準　III 積分法の応用

♣ 文系学部

- **1**　標準　II 微分積分
- **2**　標準　B 複素数と複素数平面
- **3**　標準　II 図形と方程式
- **4**　やや難　I 2 次関数

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1　$y_n = \dfrac{n(n+\sqrt{3})a}{\sqrt{3}(n^2+1)}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{\sqrt{3}}$

2　最大値：$\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$　$\left(x = \dfrac{a}{\sqrt{a^3+b^3}},\ y = \dfrac{b}{\sqrt{a^3+b^3}}\right)$

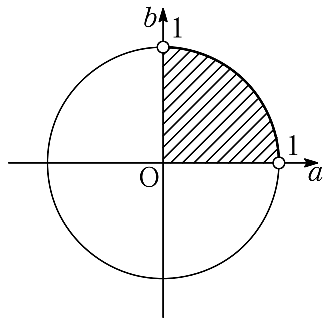
3　(1)　$L = \left(a^3 - \dfrac{b^3}{k}\right)^2 (k^2+1)$

(2)　$m = (a^2+b^2)^3$　$\left(k = -\dfrac{b}{a}\right)$

(3)　$\begin{cases} a > 0, \quad b > 0 \\ a^2 + b^2 \leqq 1 \end{cases}$

求める領域は，右図の斜線部分である．

境界は，円周上の点は含み，a 軸，b 軸および白丸は含まない．



4　(1)　証明は省略

(2)　$2\pi b < l < 2\pi a$

(3)　証明は省略

◇ 文系学部

1　(1)　$m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　$\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

2　(1)　$z = \overline{z}$ または $|z| = 1$ $(z \neq 0)$

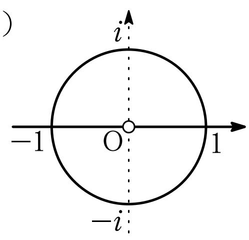
右図の太実線部分

(2)　実軸上の $\dfrac{1}{3}$ 以上 3 以下の部分と，

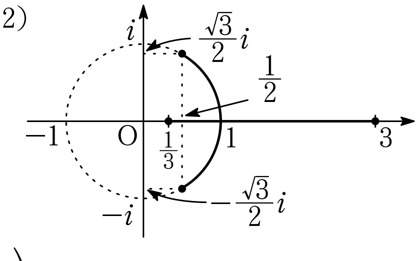
原点中心，半径 1 の円周の実部が $\dfrac{1}{2}$ 以上の部分

右図の太実線部分

(1)



(2)



3　(1)　$\tan\theta = \dfrac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{3}m-1}$　$\left(m \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(2)　$\dfrac{am(m+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(m^2+1)}$

4　(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}$

(2)　最大値：$\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b^3}}$　$\left(x = \dfrac{a}{\sqrt{a^3+b^3}},\ y = \dfrac{b}{\sqrt{a^3+b^3}}\right)$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto