◀1997 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　新課程履修者は [1]〜[3] から 1 題選択し，旧課程履修者は [1]〜[4] から 1 題選択し解答せよ．

[1]　ある整式 A を x^2+1 で割ると余りが $x+1$ で，$x+1$ で割ると余りが 1 である．整式 A を $(x^2+1)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

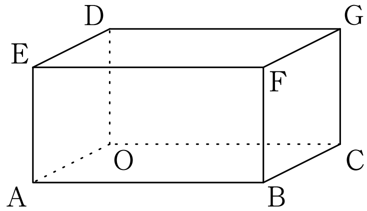
[2]　1 辺の長さが 1 の正五角形において，5 本の対角線を引いたときにできる小さな正五角形の 1 辺の長さを求めよ．

[3]　$a_1=1,\ b_1=1,\ b_{n+1}=3b_n+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をみたす 2 つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ があり，$c_n=a_n+b_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき $\{c_n\}$ は公比 3 の等比数列になる．このとき，次の問いに答えよ．

（1）　a_n を n の式で表せ．

（2）　b_n を n の式で表せ．

[4]　右の図のような $\mathrm{OA}=p,\ \mathrm{OC}=q,\ \mathrm{OD}=r$ である直方体 OABC − DEFG において，平面 ADC と平面 DFC のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．



2　[1]〜[3] から 1 題選択し，解答せよ．

[1]　相異なる 3 点 O, A, B に対して $\angle \mathrm{AOB}=120^\circ$ とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+2|\vec{b}|}$ とおくとき，$\angle \mathrm{AOP}$ を求めよ．

[2]　$p,\ q,\ r$ は実数で，$p^2+q^2 \neq 0$ とする．x の方程式 $x^3+(2p-1)x^2+(p^2+q^2-2p)x-p^2-q^2=0$ の 3 つの解 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ に対して，$\dfrac{1}{\alpha_1},\ \dfrac{1}{\alpha_2},\ \dfrac{1}{\alpha_3}$ を解とする方程式が $rx^3-33x^2+9x-1=0$ となるとき，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ の値を求めよ．

[3]　袋 A には白玉が m 個と黒玉が 1 個入っており，袋 B には白玉が 1 個と黒玉が m 個入っている．ただし，$m \geqq 1$ とする．それぞれの袋から無作為に玉を 1 個ずつ取り出し，2 個とも白玉なら 2 個とも袋 A に入れ，2 個とも黒玉なら 2 個とも袋 B に入れ，白玉と黒玉が出たときは，白玉は黒玉が出た袋に，黒玉は白玉が出た袋に入れる，という試行を考える．試行後の袋 A の中の白玉の個数の確率分布およびその期待値を求めよ．

3　x の 2 次方程式 $x^2+2(a+\sin^2\theta)x+2a+3+\cos 2\theta=0$ が $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲のすべての θ に対して実数解をもつとする．このとき，a の値の範囲を求めよ．

4　2 つの放物線 $y=x^2,\ y=(x-n)^2+n^2$ と y 軸で囲まれた部分（境界線を含む）にあって，x 座標，y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，n は自然数である．

（1）　a_n を求めよ．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ．

5　区間 $[-2,\ 2]$ において連続な曲線 $y=f(x)$ が次の条件をみたしているとする．

$$f(-2)=f(2)=0,\quad f'(x)=\begin{cases}\alpha & (-2<x<-1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ -\alpha & (1<x<2)\end{cases}$$

$\alpha \geqq 0$ として，$\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$ を最小にする α の値およびその最小値を求めよ．

♠ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ．

2 理系学部 **2** と同じ．

3 1 辺の長さが 12cm の正三角形 ABC がある．点 P は点 A から，点 Q は点 B から，点 R は点 C から同時に出発し，それぞれ三角形 ABC の辺に沿って左まわり（反時計まわり）に動く．点 P は毎秒 2cm，点 Q は毎秒 3cm，点 R は毎秒 4cm の一定の速さで動くとき，出発から t 秒後の三角形 PQR の面積 $S(t)$ の $0 \leqq t \leqq 3$ における最小値と，そのときの t の値を求めよ．

4 x の 2 次方程式 $x^2 + 2(a + \sin^2\theta)x + 2a + 3 + \cos 2\theta = 0$ が $-60^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$ の範囲のすべての θ に対して実数解をもつとする．このとき，a の値の範囲を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ のとき $x + \dfrac{1}{x} \geqq 2$ を示せ．

(2) $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$ $(a>0)$ とする．2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた領域の面積を S とするとき，$\dfrac{S}{a}$ を最小にする a の値およびその最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 基本　A 整式の計算・数列・B ベクトル（空間）

2 標準　I 確率・II 高次方程式・B ベクトル（平面）

3 標準　I 2 次関数・II 三角関数

4 標準　III 数列の極限

5 標準　III 関数の連続性・積分法

♣ 文系学部

1 基本　A 整式の計算・数列・B ベクトル（空間）

2 標準　I 確率・II 高次方程式・B ベクトル（平面）

3 基本　I 2 次関数

4 標準　I 2 次関数・II 三角関数

5 標準　A 不等式の証明・II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 [1]　$\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$

[2]　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

[3](1)　$a_n=3\cdot2^{n-1}-2$

[3](2)　$b_n=3^n-3\cdot2^{n-1}+1$

[4]　$\cos\theta=\pm\dfrac{p^2q^2-q^2r^2+r^2p^2}{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}$

2 [1]　$\angle\mathrm{AOP}=30^\circ$

[2]　$\alpha_1=1,\ \alpha_2=4+3i,\ \alpha_3=4-3i$

[3]

袋 A の白玉の個数	$m-1$	m	$m+1$
確　　率	$\dfrac{m^2}{(m+1)^2}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2}$	$\dfrac{1}{m+1}$

期待値 ：$\dfrac{m^3+m^2+2m+1}{(m+1)^2}$

3　$a\leqq-\dfrac{5}{4},\ 1+\sqrt{5}\leqq a$

4 (1)　$a_n=n^3+n^2+n+1$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{4}$

5　最小値 ：$\dfrac{53}{48}\ \left(\alpha=\dfrac{7}{16}\right)$

◇ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　最小値 ：$\dfrac{207\sqrt{3}}{26}$ (cm^2)　$\left(t=\dfrac{27}{13}\text{（秒）}\right)$

4　理系学部 **3** と同じ．

5 (1)　証明は省略

(2)　最小値 ：4 ($a=1$)