◀1995 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　直線 $x-y-1=0$ が，原点を中心とする回転によって直線 $kx-2y+3=0$ $(k \geqq 0)$ に重なるとき，k の値と回転を表す行列を求めよ．

2　曲線 $C_n : y=x^n-x$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ の，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ における接線を ℓ_n，原点 O における接線を m_n とし，ℓ_n と m_n の交点の x 座標を H_n とする．また，$0 \leqq x \leqq 1$ において，曲線 C_n と ℓ_n および y 軸によって囲まれた部分の面積を S_n とし，さらに $C_n,\ \ell_n,\ m_n$ によって囲まれた部分の面積を T_n とする．

(1)　$H_n,\ S_n,\ T_n$ を n で表せ．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{T_k}{S_k H_k} = H_n$ であることを示せ．

3　関数 $f(x)=x^4-x^2+\dfrac{1}{8}$ について，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．また，$g(x)$ を $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数とする．

(1)　M とそれを与える x の値を求めよ．

(2)　$-1 \leqq x \leqq 1$ において $|g(x)| < M$ が成り立つとき，方程式 $f(x)=g(x)$ は $-1 < x < 1$ の範囲に少なくとも 4 つの実数解をもつことを示せ．

(3)　$g(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\ b,\ c,\ d$ は実数の定数$)$ とすると，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|g(x)|$ の最大値は M 以上であることを示せ．

4　表の出る確率が p $(0<p<1)$ である硬貨がある．この硬貨を投げ続け，各回投げたあとでそれまでに表が偶数回出ていれば 1 点加点し，奇数回出ていれば 1 点減点するゲームを行う．持ち点 0 から始めて，硬貨を n 回投げた時点での点数の期待値を E_n とする．

(1)　この硬貨を n 回投げて，表の出た回数が偶数である確率を a_n とする．このとき，a_n を a_{n-1} で表せ $(n \geqq 2)$．

(2)　上で定義した a_n を求めよ．

(3)　E_n および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　体積 V の粘土がある．これを用いて作った球の表面積を S とする．この粘土を 2^n 等分 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ して作った 2^n 個の球の表面積の和を S_n とするとき，$S_n > 210S$ となる最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771,\ \log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

2　次の問いに答えよ．

(1)　焦点が $(0,\ 0)$ と $(2,\ 0)$ で，長軸の長さが 4 であるだ円の方程式を求めよ．

(2)　点 $(2,\ 0)$ と $(2\sqrt{3},\ 2)$ を結んだ線分の垂直二等分線は，(1) のだ円に接することを示せ．

3　n を 2 以上の自然数とする．曲線 $C : y=x^n-x$ の，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ における接線を ℓ，原点 O における接線を m とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　ℓ と m の交点の座標を求めよ．

(2)　$0 < x < 1$ で曲線 C は ℓ および m より上側にあることを示せ.

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，曲線 C と ℓ および y 軸によって囲まれた部分の面積を S とし，また，C, ℓ, m によって囲まれた部分の面積を T とするとき，$\dfrac{T}{S}$ を求めよ.

4　空間の 2 点 $\mathrm{A}(0, 1, 0)$, $\mathrm{B}(0, 0, 1)$ に対して，平面 $x + y + z = a$ 上の点 P が $\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ を満たしながら動くとする.

(1)　AP を最小にする点 P の座標を求めよ.

(2)　(1) の点 P に対して，$90^\circ \leqq \angle\mathrm{APB} \leqq 180^\circ$ となる a の範囲を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　代幾　1 次変換
- **2**　標準　基解　数列・微分積分
- **3**　標準　基解　微分積分
- **4**　標準　基解　数列・微積　数列の極限・確統　確率分布

♣ 文系学部

- **1**　標準　基解　指数関数・対数関数
- **2**　標準　代幾　2 次曲線
- **3**　標準　基解　微分積分
- **4**　標準　代幾　ベクトル・空間座標

略解

◇ 理系学部

1　$k=\sqrt{14}$, $\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{14}+2}{6} & \dfrac{\sqrt{14}-2}{6} \\ -\dfrac{\sqrt{14}-2}{6} & -\dfrac{\sqrt{14}+2}{6} \end{pmatrix}$

2　(1)　$H_n=\dfrac{n-1}{n}$,　$S_n=\dfrac{n(n-1)}{2(n+1)}$,　$T_n=\dfrac{n-1}{2n(n+1)}$

(2)　証明は省略

3　(1)　$M=\dfrac{1}{8}$　$\left(x=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm1\right)$

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

4　(1)　$a_n=(1-2p)a_{n-1}+p$　$(n\geqq2)$

(2)　$a_n=\dfrac{1}{2}(1-2p)^n+\dfrac{1}{2}$

(3)　$E_n=\dfrac{(1-2p)\{1-(1-2p)^n\}}{2p}$,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n=\dfrac{1-2p}{2p}$

◇ 文系学部

1　$n=24$

2　(1)　$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2)　証明は省略

3　(1)　$\left(\dfrac{n-1}{n},\ -\dfrac{n-1}{n}\right)$

(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{n^2}$

4　(1)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{a-1}{3},\ \dfrac{2a+1}{6},\ \dfrac{2a+1}{6}\right)$

(2)　$\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$