◀2015 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　座標平面上の 2 つの曲線 $y=\dfrac{x-3}{x-4}$, $y=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1, C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1)　2 曲線 C_1, C_2 の交点をすべて求めよ．

(2)　2 曲線 C_1, C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

2　座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を C とする．$a>2$, $0<\theta<\pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta, \sin\theta)$ をとる．原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする．点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする．以下の問に答えよ．

(1)　点 R の座標を求めよ．

(2)　(1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする．このとき，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3)　原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする．このとき，$0<\theta<\pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ．

3　a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を

$$y=x^4-2(a+1)x^3+3ax^2$$

で定める．曲線 C が 2 つの変曲点 P, Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする．三角形 PQR の面積を求めよ．

(3)　曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P′ とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q′ とする．線分 P′Q′ の中点の x 座標を求めよ．

4　a, b を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　$x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p, q, r を，a, b を用いて表せ．

(2)　$b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3)　無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

5　a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$　3 辺の長さが a, b, c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1)　$a=b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a, b, c の組の個数を求めよ．

(2)　$a>b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a, b, c の組の個数を求めよ．

(3)　条件 $(*)$ をみたす a, b, c の組の個数を求めよ．

♠ 文系学部

1　s, t を $s < t$ をみたす実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(s,\ s^2)$, $\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする．以下の問に答えよ．

(1)　s と t の間の関係式を求めよ．

(2)　線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする．u と v の間の関係式を求めよ．

(3)　s, t が変化するとき，v の最小値と，そのときの $u,\ s,\ t$ の値を求めよ．

2　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が $a_1 = 5$, $b_1 = 7$ をみたし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x + b_{n+1}) = \int_{c_n}^{x+c_n} (a_n t + b_n)\,dt$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　$c_n = 3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$c_n = n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

3　理系学部の **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

2　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・2 次曲線

3　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用

4　標準　$\boxed{\text{B}}$ 数列

5　やや難　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題

♣ 文系学部

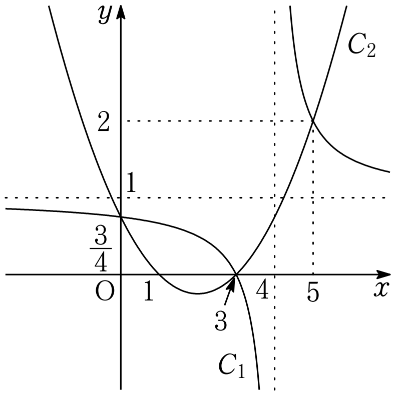
1　標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

2　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分・$\boxed{\text{B}}$ 数列

3　やや難　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題

略解

◇ 理系学部



1 (1) $\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$, $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$

(2) C_1, C_2 の概形は右図．面積：$3-2\log 2$

2 (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$

(2) 最大値：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-4}}$

(3) $g(\theta)=a^2\cdot\dfrac{1+3\cos^2\theta}{(a-2\cos\theta)^2}$,　最大値：$\dfrac{3a^2}{3a^2+4}$

3 (1) $a=1$

(2) $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

(3) 1

4 (1) $p=2b,\ q=a-3b,\ r=-a+b$

(2) $b=0$ のとき，$\dfrac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}$

$a=0$ のとき，$\dfrac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$

(3) $\dfrac{5a+7b}{6}$

5 (1) 9

(2) 9

(3) 115

◇ 文系学部

1 (1) $s+t-st=2$

(2) $v=2u^2-2u+2$

(3) v の最小値：$\dfrac{3}{2}$　$\left(u=\dfrac{1}{2},\ s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

2 (1) $a_n=5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $b_n=10\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-3$

(3) $b_n=27-5(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

3 理系学部 **5** と同じ．