◀2013 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　空間において，2 点 A$(0,\ 1,\ 0)$, B$(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3)　R, S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

2　$p,\ r$ を $-r<p<r$ をみたす実数とする．4 点 P$(p,\ p^2)$, Q$(r,\ p^2)$, R$(r,\ r^2)$, S$(p,\ r^2)$ に対し，線分 PR の長さは 1 であるとする．このとき，長方形 PQRS の面積の最大値と，そのときの P, R の x 座標をそれぞれ求めよ．

3　c を $0<c<1$ をみたす実数とする．$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$, $(c,\ c^3-2c)$, $(1,\ -1)$ を通るとする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ．

(3)　(2) で求めた S を最小にするような c の値を求めよ．

4　$a,\ b$ を実数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)=a\cos x+b$ が，

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3\,dx$$

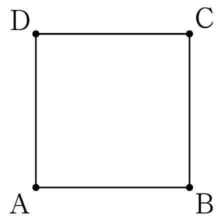
をみたすとする．このとき，$a,\ b$ がみたす関係式を求めよ．

(2)　(1) で求めた関係式をみたす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ．

5　動点 P が，図のような正方形 ABCD の頂点 A から出発し，さいころをふるごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する．

出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する．

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する．



n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n，C にいる確率を c_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　a_1 を求めよ．

(2)　さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいることを証明せよ．

(3)　$a_n,\ c_n$ を n を用いてそれぞれ表せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n,\ \lim_{n\to\infty}c_n$ をそれぞれ求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部の **1** と同じ.

2　a, b, c は実数とし，$a < b$ とする．平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$, $\mathrm{C}(c, c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする．次の問いに答えよ．

(1)　a を b, c を用いて表せ．

(2)　$b - a \geqq 2$ が成り立つことを示せ．

(3)　斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ．

3　赤色，緑色，青色のさいころが各 2 個ずつ，計 6 個ある．これらを同時にふるとき，

赤色の 2 個のさいころの出た目の数 r_1, r_2 に対し $R = |r_1 - r_2|$

緑色の 2 個のさいころの出た目の数 g_1, g_2 に対し $G = |g_1 - g_2|$

青色の 2 個のさいころの出た目の数 b_1, b_2 に対し $B = |b_1 - b_2|$

とする．次の問いに答えよ．

(1)　R がとりうる値と，R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ．

(2)　$R \geqq 4$, $G \geqq 4$, $B \geqq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ．

(3)　$RGB \geqq 80$ となる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　|基本|　$\boxed{\mathrm{B}}$ ベクトル（空間）

2　|標準|　$\boxed{\mathrm{II}}$ 図形と方程式

3　|標準|　$\boxed{\mathrm{III}}$ 積分法の応用

4　|標準|　$\boxed{\mathrm{III}}$ 積分法

5　|標準|　$\boxed{\mathrm{A}}$ 確率・$\boxed{\mathrm{III}}$ 数列の極限

♣ 文系学部

1　|基本|　$\boxed{\mathrm{B}}$ ベクトル（空間）

2　|やや難|　$\boxed{\mathrm{II}}$ 不等式の証明・図形と方程式

3　|標準|　$\boxed{\mathrm{A}}$ 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$

(2) $\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{S}(0, 0, 0)$

(3) $\mathrm{T}\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right)$, $\mathrm{U}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right)$

2 最大値： $\frac{1}{2}$ ，（P の x 座標）$= \frac{2-\sqrt{2}}{4}$,（R の x 座標）$= \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

3 (1) $f(x) = (c+1)x^2 - (c+2)x$

(2) $S = -\frac{1}{6}c^4 + \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{6}c + \frac{1}{12}$

(3) $c = \frac{1}{2}$

4 (1) $4b^3 + 2(3a^2 - 2)b + 1 = 0$

(2) $-\frac{\sqrt{6}}{6} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{6}}{6}$

5 (1) $a_1 = \frac{5}{9}$

(2) 証明は省略

(3) $a_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$, $c_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ.

2 (1) $a = -c - \frac{1}{b+c}$ $\left(a = -\frac{c^2+bc+1}{b+c}\ \text{でも可}\right)$

(2) 証明は省略

(3) 最小値： 2, A$(-1, 1)$, B$(1, 1)$, C$(0, 0)$

3 (1)

R	0	1	2	3	4	5
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

(2) $\frac{1}{216}$

(3) $\frac{19}{5832}$