

◀2012年 神戸大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 座標平面上に2点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ と直線 l があり, A と l の距離と B と l の距離の和が1であるという. 以下の問に答えよ.

- (1) l は y 軸と平行でないことを示せ.
- (2) l が線分 AB と交わる時, l の傾きを求めよ.
- (3) l が線分 AB と交わらないとき, l と原点との距離を求めよ.

2 x を実数とし, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = A - xE$ とおく. P は $P^2 = P$ をみたすとす. 以下の問に答えよ.

- (1) x の値を求めよ.
- (2) n を自然数とする.

$$A^n = a_n P + b_n E$$

をみたす a_n, b_n を n を用いて表せ.

3 $x > 0$ に対し関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定め, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $\frac{d}{dx} f(x)$ を求めよ.
- (2) $\frac{d}{dx} g(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ を求めよ.

4 自然対数の底を e とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $e < 3$ であることを用いて, 不等式 $\log 2 > \frac{3}{5}$ が成り立つことを示せ.
- (2) 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x$ の導関数を求めよ.
- (3) 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

の値を求めよ.

- (4) (3) で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ.

5 座標平面上の曲線 C を, 媒介変数 $0 \leq t \leq 1$ を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める. 以下の問に答えよ.

- (1) 曲線 C の概形を描け.
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が, y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ.

♠ 文系学部

1 理系学部の **1** と同じ.

2 a を正の実数とする. 2つの放物線

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

が異なる2点で交わるとし, 2つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) $S(a)$ を a を用いて表せ.
- (3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ.

3 以下の問に答えよ.

- (1) 正の実数 x, y に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

- (2) n を自然数とする. n 個の正の実数 a_1, \dots, a_n に対して

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 標準 II 図形と方程式
- 2** 標準 C 行列
- 3** 標準 III 積分法
- 4** 基本 III 微分法の応用・積分法の応用
- 5** 標準 III 積分法の応用

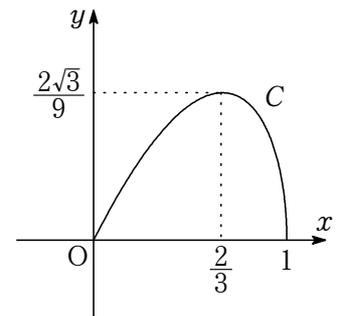
♣ 文系学部

- 1** 標準 II 図形と方程式
- 2** 標準 II 微分積分
- 3** 標準 II 不等式の証明

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) 証明は省略
 (2) $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
 (3) $\frac{1}{2}$
- 2** (1) $x = 2$
 (2) $a_n = 3^n - 2^n, b_n = 2^n$
- 3** (1) $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 (2) $\frac{d}{dx} g(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
 (3) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- 4** (1) 証明は省略
 (2) $f'(x) = -\frac{\cos x}{1+\cos x}$
 (3) $\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$
 (4) 正
- 5** (1) 曲線 C の概形は右図.
 (2) $\frac{32}{105}\pi$



◇ 文系学部

- 1** 理系学部 **1** と同じ.
- 2** (1) $0 < a < \sqrt{3}$
 (2) $S(a) = \frac{4}{3}(3a - a^3)^{\frac{3}{2}}$
 (3) 最大値 : $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ($a = 1$)
- 3** (1) 証明は省略. 等号成立条件は, $x = y$
 (2) 証明は省略. 等号成立条件は, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$