◀2008 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　実数 x, y に関する次の各命題の真偽を答えよ．さらに，真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ．

(1)　$x > 0$ かつ $xy > 0$ ならば，$y > 0$ である．

(2)　$x \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$ ならば，$y \geqq 0$ である．

(3)　$x + y \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$ ならば，$y \geqq 0$ である．

2　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1,\,0)$, $\mathrm{B}(-1,\,0)$, $\mathrm{C}(0,\,\sqrt{3})$ をとる．このとき，次の問に答えよ．

(1)　A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する．このような r の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A, B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ．

(3)　A, B, C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 ℓ に接する．このような s の値と直線 ℓ の方程式をすべて求めよ．

3　1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を S とするとき，次の問に答えよ．

(1)　n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば，S が偶数であることを示せ．

(2)　S が偶数ならば，n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ．

(3)　S が 4 の倍数ならば，n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ．

4　xy 平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\,2)$, $\mathrm{B}(2,\,2)$, $\mathrm{C}(2,\,1)$, $\mathrm{D}(4,\,1)$, $\mathrm{P}(0,\,3)$ をとる．点 P を通り傾き a の直線 ℓ が，線分 BC と交わり，その交点は B, C と異なるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　a の値の範囲を求めよ．

(2)　直線 ℓ と線分 AB，線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1，直線 ℓ と線分 BC，線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき，それらの和 $V = V_1 + V_2$ を a の式で表せ．

(3)　(1) で求めた a の値の範囲で，(2) で求めた V は，$a = -\dfrac{3}{4}$ のとき最小値をとることを示せ．

5　n, k を自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$(1 + x)^n$ の展開式を用いて，次の等式を示せ．

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

$$0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$$

(2)　$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ を求めよ．

(3)　2 次の正方行列 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots, M_n$ は，それぞれが $\dfrac{1}{3}$ の確率で，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のいずれかになるとする．n 個の行列の積 $M_1M_2M_3\cdots\cdots M_n$ が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と等しくなる確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　x の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問に答えよ．ただし，a, b, c は定数で $a \neq 0$ とする．

(1)　実数 α, β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ．

(2)　実数 α, β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ．

2　1 から n までの自然数 1, 2, 3, ……, n の和を S とするとき，次の問に答えよ．

(1)　n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば，S が偶数であることを示せ．

(2)　S が偶数ならば，n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ．

(3)　n を 8 で割った余りが 3 または 4 ならば，S が 4 の倍数でないことを示せ．

3　次の問に答えよ．

(1)　xy 平面において，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$ と直線 $y=x$ が共有点をもたないための a, b, c の条件を求めよ．ただし，a, b, c は定数で $c \neq 0$ とする．

(2)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を，順に a, b, c とする．a, b, c が (1) で求めた条件をみたす確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　|基本|　$\boxed{\text{A}}$ 命題と論証
- **2**　|標準|　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **3**　|標準|　$\boxed{\text{I}}$ 整数問題
- **4**　|標準|　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **5**　|標準|　$\boxed{\text{A}}$ 確率

♣ 文系学部

- **1**　|標準|　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **2**　|標準|　$\boxed{\text{I}}$ 整数問題
- **3**　|標準|　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

略解

◇ 理系学部

1 (1) 真．証明は省略

(2) 偽．反例 ： $x=0,\ y=-1$

(3) 真．証明は省略

2 (1) $r=1$

(2) 証明は省略

(3) ℓ ： $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\pm\sqrt{3}x$

$s=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（上の 3 つの方程式について s の値はすべて同じ）

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $-1<a<-\dfrac{1}{2}$

(2) $V=-\dfrac{\pi}{3}\left(16a^2+72a+78+\dfrac{27}{a}\right)$

(3) 証明は省略

5 (1) 証明は省略

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (k\text{ が奇数}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (k\text{ が偶数}) \end{cases}$$

(3) $\dfrac{2^{n-1}}{3^n}$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3 (1) $|a-b|>2|c|$

(2) $\dfrac{7}{108}$