◀1998 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 座標空間内の 8 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 1), Q(2, 0, 1), R(2, 2, 1), S(0, 2, 1) を頂点とする直方体を考える．次の各問いに答えよ．

(1)　D $=(x, y, 1)$ を面 PQRS 上の点とするときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を x, y およびベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交するための条件を x, y を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である D の中で $\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|$ が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ．

2 $0<a<4$ とし，座標平面上の 4 点 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, 4-a)$, $(0, 4-a)$ を頂点とする長方形の内部を I_a とする．$y \leqq \dfrac{1}{x}$ を満たす I_a の点 (x, y) 全体のなす図形の面積を $S(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$S(a)$ を a を用いて表せ．

(2)　$S(a)$ の最大値を求めよ．

3 次の各問いに答えよ．

(1)　$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，AB_1-B_1A と AB_2-B_2A を計算せよ．

(2)　3×3 行列 A で，任意の 3×3 行列 B に対して $AB=BA$ を満たすものをすべて求めよ．

4 $0<x<\dfrac{1}{2}$ とする．一辺の長さが 1 の正方形の紙の 4 つのすみから一辺の長さが x の正方形を切り取りふたのない箱 A を作る．さらに，切り取った一辺の長さが x の正方形の 4 つのすみをそれぞれ切り取り，A と相似なふたのない箱 B_i $(i=1, 2, 3, 4)$ を作る．次の各問いに答えよ．

(1)　箱 A の容積 $f(x)$ を最大にする x の値 a を求めよ．

(2)　箱 B_1 の容積 $g(x)$ を最大にする x の値 b を求めよ．

(3)　方程式 $f'(x)+4g'(x)=0$ が区間 $a<x<b$ に解をもつことを示せ．

5 A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る．A 地点と B 地点の間に中継点を $2n-1$ 箇所作り AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると，1 つの区間において 0 と 1 とが逆転して伝わる確率は $\dfrac{1}{4n}$ である．このとき A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする．次の各問いに答えよ．

(1)　偶数回の逆転があると，A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注意して P_2 を求めよ．

(2)　$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k}a^{2n-2k}b^{2k}$ を示せ．

(3)　P_{2n} を求めよ．

(4)　$\lim_{n\to\infty} P_{2n}$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の各問いに答えよ．

(1)　z が虚数で $z+\dfrac{1}{z}$ が実数のとき $|z|$ の値 a を求めよ．

(2)　(1) で求めた a に対して，z が条件 $|z|=a$ を満たしながら動くとき，$w=(z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4$ の絶対値と偏角の動く範囲を求めよ．

2　$a>0$ とする．関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ．

(2)　$M(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

3　理系学部 **1** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　|基本|　B　ベクトル
- **2**　|標準|　III　微分法の応用・積分法の応用
- **3**　|標準|　C　行列
- **4**　|標準|　III　微分法の応用
- **5**　|標準|　I　確率・III　数列の極限

♣ 文系学部

- **1**　|標準|　B　複素数と複素数平面
- **2**　|標準|　II　微分積分
- **3**　|基本|　B　ベクトル

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2)$

(2) $y=x+\dfrac{1}{2},\quad 0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$

(3) $x=0,\quad y=\dfrac{1}{2}$

2 (1) $S(a)=\begin{cases} a(4-a) & (0<a\leqq 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\leqq a<4) \\ 1+\log a(4-a) & (2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}) \end{cases}$

(2) 最大値：$1+2\log 2$ $(a=2)$

3 (1) $AB_1-B_1A=\begin{pmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad AB_2-B_2A=\begin{pmatrix} -b_1 & a_1-b_2 & -b_3 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$（$\alpha$ は任意の実数）

4 (1) $a=\dfrac{1}{6}$

(2) $b=\dfrac{1}{3}$

(3) 証明は省略

5 (1) $P_2=\dfrac{5}{8}$

(2) 証明は省略

(3) $P_{2n}=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$

◇ 文系学部

1 (1) $a=1$

(2) $1\leqq|w|\leqq 81,\quad 60^\circ\leqq\arg w\leqq 300^\circ$

2 (1) $M(a)=\begin{cases} -3a^2+1 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ 2a^3 & \left(\dfrac{1}{2}<a\leqq 1\right) \\ 3a^2-1 & (1<a) \end{cases}$

(2) $a=\dfrac{1}{2}$

3 理系学部 **1** と同じ．