◀1996 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　O を原点とする平面上において，点 A は半円 $(x-1)^2+y^2=1\ (y<0)$ 上にある．点 B は $2\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ を満たし，y 軸上の正の部分にあるとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，2 点 A, B の座標を θ を用いて表せ．

(2)　線分 AB と x 軸の交点を C とする．点 A を点 O に近づけるとき，$\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AB}^2}$ の極限値を求めよ．

2　数列 $\{a_n\}$ は次の関係を満たす．

$$a_1=0,\quad a_n\sin\theta+a_{n+1}\cos\theta=\sin\theta\cdot\cos\theta\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a_n を n と θ を用いて表せ．

(2)　$n\to\infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が収束するような θ の範囲と，そのときの極限値 $f(\theta)$ を求めよ．

(3)　θ が (2) で求めた範囲を動くとき，$f(\theta)$ の値の範囲を求めよ．

3　数列 $\{f_n\}$ は次の性質 (i), (ii), (iii) をもつとする．

(i)　$f_1=0$

(ii)　$i,\ j$ が正の整数であるとき，積 ij に対して，$f_{ij}=f_i+f_j$

(iii)　$i,\ j$ が $i<j$ を満たす正の整数であるとき，$f_i<f_j$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$r,\ s$ が正の整数であるとき，整数 s^r に対して，$f_{s^r}=rf_s$ が成り立つことを示せ．

(2)　$k,\ l$ をいずれも 2 以上の整数とし，正の整数 N に対して，$l^m<k^N\leqq l^{m+1}$ を満たす 0 以上の整数 m をとる．次の不等式 $\dfrac{m}{N}<\dfrac{f_k}{f_l}\leqq\dfrac{m+1}{N}$ が成り立つことを示せ．

4　点 P は x 軸上を，負の方向から原点を通過し，正の方向に動くとする．時刻 t(秒) における，点 P の位置を表す関数を $x(t)$ とし，点 P の速度を表す関数を $v(t)$ とする．ただし，$x(t),\ v(t)$ は各時刻で連続とする．

　$x(t)<0$ のとき，点 P の運動は次の微分方程式 $\dfrac{dv(t)}{dt}=32-2v(t)$ を満たし，$x(t)>0$ のとき，点 P の運動は次の微分方程式 $\dfrac{dv(t)}{dt}=24-6v(t)$ を満たす．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$v(0)=0,\ x(0)=-50$ とする．m 秒から $m+1$ 秒の間に，動点 P は原点に到達する．このような整数値 m を求めよ．

(2)　原点を通過した後，n 秒から $n+1$ 秒の間に，動点 P は $x=10$ の点を通過する．このような整数値 n を求めよ．ただし，P が原点を通過する速度は 15.9886…… であるが，計算上 16 としてよい．

5　ある人が次のゲームを行う．1 から 5 までの数が 1 つずつ書かれたカードが計 5 枚入った袋がある．正三角形 ABC の頂点 B を出発点にして，袋から 1 枚のカードを取り出すごとに，そのカードに書かれた数だけ BCAB…… の順に頂点を移動する．ただし，取り出したカードはすぐにもとの袋に戻し，よくかき混ぜるとする．ちょうど頂点 A に移動すれば，上がりとなりゲームは終了する．

　例えば，頂点 B にいるとき 1 または 4 のカードが出れば頂点 C に移動し，また頂点 C にいるとき 2 または 5 のカードが出れば頂点 B に移動する．頂点 B にいるとき，2 または 5 のカードが出れば頂点 A に移動し，

ゲームは終了する．

n 回以下の試行でゲームが上がりとなる確率を a_n とする．また，n 回の試行を終えたときに，ちょうど頂点 B にいる確率を b_n，ちょうど頂点 C にいる確率を c_n とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a_2, b_2, c_2 を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$b_n + c_n$，$b_n - c_n$ を b_{n-1}, c_{n-1} を用いて表せ．

(3)　a_n, b_n, c_n を n で表せ．

♠ 文系学部

1　零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，$0 < m \leqq n$ となる整数 m, n があり，

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = m\vec{a}\cdot\vec{a} = n\vec{b}\cdot\vec{b}$$

が成り立つとする．このとき，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ の値と，そのときの $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ の値をすべて求めよ．ただし，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルの内積，$|\vec{a}|$ はベクトルの大きさである．

2　xy 平面上の 2 次曲線 C を $9x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 60$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 C は，原点のまわりに角度 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ だけ回転すると，$ax^2 + by^2 = 1$ の形になる．θ の値と定数 a, b を求めよ．

(2)　曲線 C 上の点と点 $(c, -\sqrt{3}c)$ との距離の最小値が 2 であるとき，c の値を求めよ．ただし，$c > 0$ とする．

3　3 次曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸に囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる体積を V とする．このとき，V を最小にする a, b, c の値と，そのときの V の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　微積 関数の極限

2　標準　基解 数列・微積 微分法の応用

3　標準　I 不等式の証明：基解 数列

4　やや難　微積 微分方程式

5　標準　基解 数列・確統 確率

♣ 文系学部

1　標準　I 整数問題・代幾 ベクトル

2　標準　代幾 行列・1 次変換

3　標準　基解 数列・微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\mathrm{A}(2\sin^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$,　$\mathrm{B}(0,\ 4\sin\theta)$

(2) $\dfrac{1}{27}$

2 (1) $a_n=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta}{1+\tan\theta}\{1-(-\tan\theta)^{n-1}\} & \left(\theta\fallingdotseq-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ -\dfrac{n-1}{\sqrt{2}} & \left(\theta=-\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

(2) 収束する θ の範囲：$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1+\tan\theta}$

(3) $f(\theta)<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

4 (1) $m=3$

(2) $n=2$

5 (1) $a_2=\dfrac{16}{25}$, $b_2=\dfrac{1}{5}$, $c_2=\dfrac{4}{25}$

(2) $b_n+c_n=\dfrac{3}{5}(b_{n-1}+c_{n-1})$

$b_n-c_n=-\dfrac{1}{5}(b_{n-1}-c_{n-1})$

(3) $a_n=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

$b_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

$c_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

◇ 文系学部

1 $\left(\theta,\ \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right)=(60^\circ,\ 1),\ (45^\circ,\ \sqrt{2}),\ (30^\circ,\ \sqrt{3}),\ (0^\circ,\ 2),\ (0^\circ,\ 1)$

2 (1) $\theta=60^\circ$,　$a=\dfrac{1}{10}$,　$b=\dfrac{1}{6}$

(2) $c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,　$\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$

3 V の最小値：$\dfrac{8}{175}\pi$　$\left(a=0,\ b=-\dfrac{3}{5},\ c=0\right)$