# ◀2016 年　北海道大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 $C$ 上に点 $z$ がある．$a$ を実数の定数とし，

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく．

(1)　$|w|^2$ を $z$ の実部 $x$ と $a$ を用いて表せ．

(2)　点 $z$ が $C$ 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を $a$ を用いて表せ．

**2**　$a > 0$ に対し，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^{a} \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right\} dt$$

をみたすとする．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$0 < a \leqq 2\pi$ において，

$$g(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$

の最小値とそのときの $a$ の値を求めよ．

**3**　机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている．ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである．

(1)　ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

(2)　ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

(3)　ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ．

**4**

(1)　次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ．

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(2)　方程式 ① の 3 つの実数解を $s, t, u$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める．このとき，

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(3)　(2) の $a_n$ がすべて整数であることを示せ．

**5**　空間の 2 点 A(0, 0, 2), B(0, 1, 3) を通る直線を $\ell$ とし，2 点 C(1, 0, 0), D(1, 0, 1) を通る直線を $m$ とする．$a$ を定数として，$\ell$ 上にも $m$ 上にもない点 P$(s, t, a)$ を考える．

(1)　P から $\ell$ に下ろした垂線と $\ell$ の交点を Q とし，P から $m$ に下ろした垂線と $m$ の交点を R とする．Q, R の座標をそれぞれ $s, t, a$ を用いて表せ．

(2)　P を中心とし，$\ell$ と $m$ がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ．

(3)　$s,\ t$ と定数 $a$ が (2) の条件をみたすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を $a$ を用いて表せ．

## ♠ 文系学部

**1**　$a,\ b,\ c$ を実数とし，

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s)),\ \mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1)　P における $C$ の接線の方程式を求めよ．

(2)　P における $C$ の接線と Q における $C$ の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ．

(3)　(2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が $C$ 上にあることを示せ．

**2**　$f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10$　$(-2 \leqq x \leqq 4)$ とおく．

(1)　関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．グラフと $x$ 軸との 2 つの交点の $x$ 座標 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha < \beta)$ の値も求めよ．

(2)　(1) の $\alpha,\ \beta$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ．

**3**　$\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB} = 2,\ \mathrm{AC} = 1 + \sqrt{3},\ \angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ をみたすとする．

(1)　$\beta = \angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ．

(2)　(1) の $\beta$ の値をすべて求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす実数 $s,\ t$ を求めよ．

**4**　$x,\ y$ を自然数とする．

(1)　$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような $x$ をすべて求めよ．

(2)　$\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

**1** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 複素数平面

**2** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法

**3** 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率

**4** やや難 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分・$\boxed{\text{B}}$ 数列

**5** やや難 $\boxed{\text{B}}$ 空間図形・$\boxed{\text{III}}$ 2 次曲線

### ♣ 文系学部

**1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

**2** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

**3** 標準 $\boxed{\text{I}}$ 図形と計量・$\boxed{\text{II}}$ 三角関数・$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）

**4** やや難 $\boxed{\text{A}}$ 整数の性質

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** (1) $|w|^2 = 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9$

(2)
$$\begin{cases} a \leqq -\dfrac{4}{5} \text{ のとき,} & |4a+5| \\ -\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5} \text{ のとき,} & 3\sqrt{1-a^2} \\ a \geqq \dfrac{4}{5} \text{ のとき,} & |4a-5| \end{cases}$$

**2** (1) $f(x) = e^{-x} + \dfrac{e^a - e^{-a}}{2}\cos a - \dfrac{e^a + e^{-a}}{2}\sin a$

(2) 最小値：$\dfrac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}$　$(a = \pi)$

**3** (1) $\dfrac{2}{3}$

(2) $\dfrac{11}{27}$

(3) $\dfrac{18}{25}$

**4** (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

**5** (1) $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{t+a-2}{2},\ \dfrac{t+a+2}{2}\right)$, $\mathrm{R}(1,\ 0,\ a)$

(2) $4s = t^2 + 2(a-2)t - (a-2)^2 + 2$

(3) 証明は省略.

焦点：$\left(\dfrac{-a^2+4a-1}{2},\ 2-a\right)$,　準線：$s = \dfrac{-a^2+4a-5}{2}$

## ◇ 文系学部

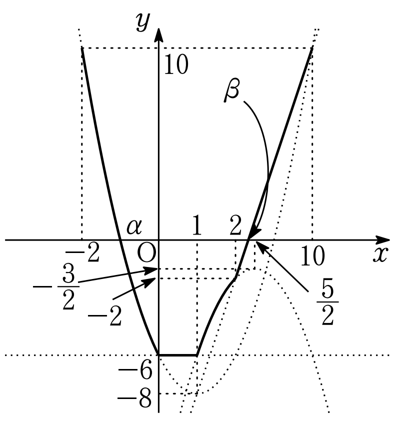
**1** (1) $y = (3s^2 + 2as + b)x - 2s^3 - as^2 + c$

(2) $3s + 3t + 2a = 0$

(3) 証明は省略

**2** (1) グラフは右図. $\alpha = -1,\ \beta = \dfrac{7}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^2 - 8 & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ -6 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2} & (1 \leqq x \leqq 2) \\ 6x - 14 & (2 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$




(2) $-\dfrac{40}{3}$

**3** (1) $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos 2\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\beta = 75^\circ$, $105^\circ$

(3) $s = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $t = -\dfrac{1}{2}$

**4** (1) $x = 1,\ 2$

(2) $(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 3)$