◀2015 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x,\quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\,(t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1)　a を t で表せ.

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ.

2　$p,\,q$ は正の実数とし，$a_1=0,\ a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とする．数列 $\{b_n\}$ の一般項を $p,\,q,\,n$ で表せ.

(2)　$q=1$ とする．すべての自然数 n について $a_{n+1}\geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ.

3　空間の 3 点 $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$, $\mathrm{A}(1,\,1,\,1)$, $\mathrm{B}(-1,\,1,\,1)$ の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく．α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく.

(1)　C の座標を求めよ.

(2)　$\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ をみたす実数 $s,\,t$ を求めよ.

(3)　α 上にない点 $\mathrm{P}(x,\,y,\,z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ をみたす実数 $k,\,l$ を $x,\,y,\,z$ で表せ.

4　初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す.

(i)　まず同時に 2 個の玉を取り出す.

(ii)　その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる.

(iii)　最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える.

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする.

(1)　$X_1=3$ となる確率を求めよ.

(2)　$X_2=3$ となる確率を求めよ.

(3)　$X_2=3$ であったとき，$X_1=3$ である条件付き確率を求めよ.

5　n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする.

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ.

(2)　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ をみたす n と a の値を求めよ.

(3)　(2) で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ.

♠ 文系学部

1　2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2,\quad C_2 : y = -(x-1)^2$$

がある．a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$, $\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする．

(1)　ℓ の方程式を a で表せ．

(2)　C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3)　C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする．線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ．

2　p は 0 でない実数とし

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$b_n = p^n a_n$ とする．b_{n+1} を $b_n,\ n,\ p$ で表せ．

(2)　一般項 a_n を求めよ．

3　平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある．O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる．O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする．ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ．

(3)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ．

4　ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える．

(1)　番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ．

(2)　番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準　III　微分法の応用
- **2** 標準　B　数列
- **3** 標準　B　ベクトル（空間）
- **4** 標準　A　確率
- **5** 標準　III　積分法の応用

♣ 文系学部

- **1** 基本　II　微分積分
- **2** 標準　B　数列
- **3** やや難　B　ベクトル（平面）
- **4** 基本　A　確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$

(2) 極小値：-1　$(t=0)$

2 (1) $b_n=\dfrac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$

(2) $p\geqq 2$

3 (1) $\mathrm{C}\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(2) $s=\frac{1}{3}$,　$t=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) $k=\dfrac{x+y+z}{3}$,　$l=\dfrac{2x-y-z}{\sqrt{6}}$

4 (1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{7}{15}$

(3) $\frac{4}{7}$

5 (1) 証明は省略

(2) $n=1$,　$a=2$

(3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

◇ 文系学部

1 (1) $\ell : y=-ax-\frac{1}{4}a^2$

(2) $a<-2$, $0<a$

(3) $a=\frac{4}{7}$

2 (1) $b_{n+1}=b_n-(-p)^{n+1}$

(2) $a_n=\begin{cases}(-1)^{n-1}\cdot n & (p=-1)\\ \dfrac{1-(-p)^n}{(1+p)p^{n-1}} & (p\neq -1)\end{cases}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $\frac{1}{5525}$

(2) $\frac{24}{5525}$