# ◀2014 年　北海道大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする．

(1)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの $x$ を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ で接する直線の方程式を求めよ．

**2**　四面体 OABC は，OA = OB = OC = 1，∠AOB = ∠BOC = ∠COA = 90° をみたす．辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を OP = $p$，OQ = $q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる．$p+q=t$ とし，△CPQ の面積を $S$ とする．

(1)　$t$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$S$ を $t$ で表せ．

(3)　$S$ の最小値，およびそのときの $p,\ q$ を求めよ．

**3**　逆行列をもつ 2 次の正方行列，$A_1$，$A_2$，$A_3$，$\cdots$ が，関係式

$$A_{n+1}A_n=A_n+2E \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．さらに $A_1+E$ は逆行列をもつとする．ここで $E$ は 2 次の単位行列とする．

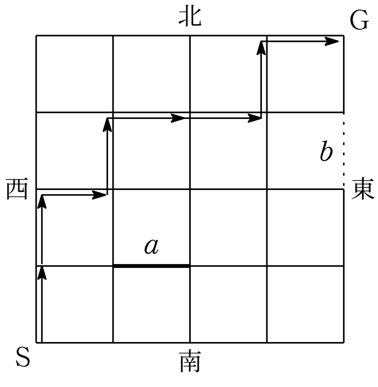
(1)　すべての自然数 $n$ に対して $A_n+E$ は逆行列をもち，

$$(A_{n+1}+E)^{-1}=\frac{1}{2}A_n(A_n+E)^{-1}$$

が成立することを示せ．

(2)　$B_n=(2E-A_n)(A_n+E)^{-1}$ により，行列 $B_n$ を定める．$B_{n+1}$ と $B_n$ との間に成立する関係式を求め，$B_n$ を $B_1$ と $n$ を用いて表せ．

**4**　図のような格子状の道路がある．S 地点を出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える．ただし太い実線で描かれた区間 $a$ を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 $b$ を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする．たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる．




(1)　$a$ を通り抜ける経路は何通りあるか．

(2)　$a$ を通り抜けずに $b$ を通り抜ける経路は何通りあるか．

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ．

**5**　$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ とおく．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの $x$ を求めよ．

## ♠ 文系学部

**1**　2 つの放物線

$$C_1: y = -x^2 + \frac{3}{2},\quad C_2: y = (x-a)^2 + a \quad (a > 0)$$

がある．点 $P_1\left(p,\ -p^2 + \frac{3}{2}\right)$ における $C_1$ の接線を $\ell_1$ とする．

(1)　$C_1$ と $C_2$ が共有点を持たないための $a$ に関する条件を求めよ．

(2)　$\ell_1$ と平行な $C_2$ の接線 $\ell_2$ の方程式と，$\ell_2$ と $C_2$ の接点 $P_2$ の座標を $a, p$ を用いて表せ．

(3)　$C_1$ と $C_2$ が共有点を持たないとする．(2) で求めた $P_2$ と $P_1$ を結ぶ線分が $\ell_1$ と垂直になるとき，$p$ を求めよ．

**2**　次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1)　以下が成立するように，実数 $s, t$ $(s > t)$ を定めよ．

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2)　一般項 $a_n$ を求めよ．

**3**　$\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする．正の実数 $p$ に対して，BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}, p$ を用いて表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, p$ を用いて表せ．

**4**　理系学部 **4** と同じ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

**1**　標準　III 微分法の応用

**2**　標準　B ベクトル（空間）・ III 微分法の応用

**3**　やや難　C 行列

**4**　標準　A 場合の数・確率

**5**　標準　III 積分法の応用

### ♣ 文系学部

**1**　標準　II 微分積分

**2**　標準　B 数列

**3**　やや難　B ベクトル（平面）

**4**　標準　A 場合の数・確率

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** (1) 極大値：0（$x=0$）

極小値：$-3$（$x=-1$），$-128$（$x=4$）

(2) $y=-24x-36$

**2** (1) $\sqrt{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{t^2-\dfrac{3}{4}}$

(3) 最小値：$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**3** (1) 証明は省略

(2) $B_{n+1}=-\dfrac{1}{2}B_n$，$B_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}B_1$

**4** (1) 20（通り）

(2) 9（通り）

(3) 17（分）

**5** (1) $f'(x)=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|$

(2) 最大値：1 $\left(x=\dfrac{\pi}{3}\right)$

最小値：$2-\sqrt{3}$ $\left(x=\dfrac{5}{6}\pi\right)$

## ◇ 文系学部

**1** (1) $a>1$

(2) $\ell_2$：$y=-2px-p^2+2ap+a$，$\mathrm{P}_2(a-p,\ p^2+a)$

(3) $p=\dfrac{1}{2}$

**2** (1) $s=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$t=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

(2) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$

**3** (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{2p^2+2p}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2p+1}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

**4** 理系学部 **4** と同じ．