◀2013 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a と b を正の実数とする．$y=a\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y=b\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする．

(1)　P の x 座標を t とする．このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ．

(2)　C_1, C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ．

(3)　C_1, C_2 と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする．このとき，$T=2S$ となるための条件を a と b で表せ．

2　座標平面上で，直線 $y=x$ に関する対称移動を f とし，実数 c に対して，直線 $y=cx$ に関する対称移動を g とする．また，原点を中心とする 120° の回転移動を h とする．

(1)　f を表す行列，および h を表す行列を求めよ．

(2)　g を表す行列を求めよ．

(3)　合成変換 $f\circ g$ が h になるように c の値を定めよ．

3　実数 x, y, s, t に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，

$$z=\frac{w-1}{w+1}$$

をみたすとする．ただし，i は虚数単位である．

(1)　w を z で表し，s, t を x, y で表せ．

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような (x, y) の範囲 D を座標平面上に図示せよ．

(3)　点 $\mathrm{P}(x, y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ．

4　次の規則に従って座標平面を動く点 P がある．2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする．

(i)　X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く．

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く．

(iii)　X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く．

(iv)　X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く．

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times 5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く．

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする．

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(-1, 0)$ にある確率を求めよ．

(2)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ．

(3)　2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が $(1, 1)$ にある確率を求めよ．

5　区間 $-\infty<x<\infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^{2x} tf(2x-t)\,dt$$

とおく．

(1)　$F\left(\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$ となることを示せ．

(2)　2 次導関数 F'' を f で表せ.

(3)　F が 3 次多項式で $F(1)=f(1)=1$ となるとき, f と F を求めよ.

♠ 文系学部

1　$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ とする.

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおき, $f(x)$ を t の関数で表せ.

(2)　t の取り得る値の範囲を求めよ.

(3)　$f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ.

2　次の規則に従って座標平面を動く点 P がある. 2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする.

(i)　X が 4 の倍数ならば, 点 P は x 軸方向に -1 動く.

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば, 点 P は y 軸方向に -1 動く.

(iii)　X を 4 で割った余りが 2 ならば, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.

(iv)　X を 4 で割った余りが 3 ならば, 点 P は y 軸方向に $+1$ 動く.

たとえば, 2 と 5 が出た場合には $2\times 5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから, 点 P は x 軸方向に $+1$ 動く.

以下のいずれの問題でも, 点 P は原点 $(0,\,0)$ を出発点とする.

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて, 点 P が $(1,\,0)$ にある確率を求めよ.

(2)　2 個のサイコロを 1 回投げて, 点 P が $(0,\,1)$ にある確率を求めよ.

(3)　2 個のサイコロを 3 回投げて, 点 P が $(2,\,1)$ にある確率を求めよ.

3　空間ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\,0,\,0),\,\overrightarrow{b},\,\overrightarrow{c},\,\overrightarrow{d}$ を考える. $\left|\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|=\left|\overrightarrow{d}\right|=1$ で, $\overrightarrow{b}$ は xy 平面上にあり, その y 成分は正とする. また, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=p$ とおく.

(1)　$|p|<1$ であることを示せ. また, p を用いて $\overrightarrow{b}$ の成分表示を書け.

(2)　$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{d}$ は相異なり,

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}=p$$

をみたすとする. $\overrightarrow{c}$ の z 成分が正のとき, p を用いて $\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{d}$ の成分表示を書け.

(3)　上の条件に加えて $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=p$ であるとき p の値を求めよ.

4　実数 t が $0 \leqq t < 8$ をみたすとき, 点 $\mathrm{P}(t,\,t^3-8t^2+15t-56)$ を考える.

(1)　点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ.

(2)　(1) での 2 本の接線の接点を Q および R とする. 線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 [III] 積分法の応用
- **2** 標準 [C] １次変換
- **3** 標準 [II] 複素数と方程式・図形と方程式
- **4** 標準 [A] 確率
- **5** 標準 [III] 積分法

♣ 文系学部

- **1** 基本 [II] 三角関数
- **2** 標準 [A] 確率
- **3** やや難 [B] ベクトル（空間）
- **4** やや難 [II] 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\sin t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $S = \sqrt{a^2+b^2} - b$

(3) $b = \dfrac{4}{3}a$

2 (1) $f : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$h : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

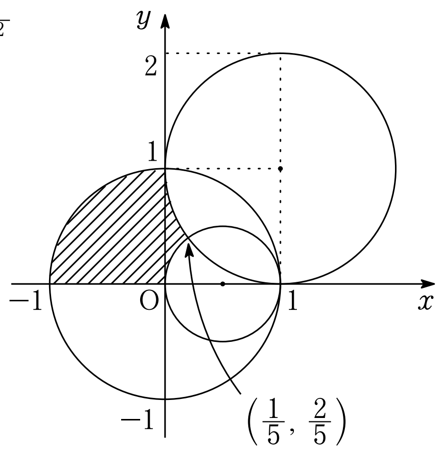
(2) $g : \dfrac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix} 1-c^2 & 2c \\ 2c & -1+c^2 \end{pmatrix}$

(3) $c = -2+\sqrt{3}$

3 (1) $w = \dfrac{-z-1}{z-1}$，$s = \dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$，$t = \dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$

(2) $D : \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqq \frac{1}{4} \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 1 \\ y \geqq 0,\ (x,\ y) \neq (1,\ 0) \end{cases}$

右図斜線部分で，境界線上の点は含む．



(3) $-\dfrac{3}{5}$，$(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

4 (1) $\dfrac{5}{12}$

(2) $\dfrac{1}{27}$

(3) $\dfrac{50}{729}$

5 (1) 証明は省略

(2) $F''(x) = 4f(2x)$

(3) $f(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$，$F(x) = 2x^3 - x^2$

◇ 文系学部

1 （1） $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2+t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2） $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

（3） $\begin{cases} \text{最大値}:\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & \left(x=\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \text{最小値}:\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} & \left(x=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi\right) \end{cases}$

2 （1） $\dfrac{1}{3}$

（2） $\dfrac{1}{9}$

（3） $\dfrac{1}{27}$

3 （1） 証明は省略. $\vec{b}=(p,\ \sqrt{1-p^2},\ 0)$

（2） $\vec{c}=\left(p,\ \dfrac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}},\ \dfrac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}\right)$, $\vec{d}=\left(p,\ \dfrac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}},\ -\dfrac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}\right)$

（3） $p=-\dfrac{1}{3}$

4 （1） 証明は省略

（2） $S(t)=\dfrac{2}{3}\left(-t^3+9t^2-15t+56\right)^{\frac{3}{2}}$