◀2011 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す．たとえば，$[2]=2$, $\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$, $[-2.1]=-3$ である．

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ．

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする．$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ．

2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，以下の 3 つの条件を考える．

（ i ） $a+d=ad-bc=0$

（ii） $A^2=O$

（iii） ある自然数 n に対して $A^n=O$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) （ i ）ならば（ii）であることを示せ．

(2) （iii）ならば $ad-bc=0$ であることを示せ．

(3) （iii）ならば（ i ）であることを示せ．

3 次の問いに答えよ．

(1) xy 平面上の 3 点 O$(0, 0)$, A$(2, 1)$, B$(1, 2)$ を通る円の方程式を求めよ．

(2) t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2, t+2, t)$ がつくる直線を ℓ とする．3 点 O$(0, 0, 0)$, A′$(2, 1, 0)$, B′$(1, 2, 0)$ を通り，中心を C(a, b, c) とする球面 S が直線 ℓ と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ．

4 n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする．1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する．これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく．たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている．これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する．1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す．同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する．このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする．

(1) a_2, a_3 を求めよ．

(2) s_n を求めよ．

(3) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ．

(4) a_n を求めよ．

5　$0 < a < 2\pi$ とする．$0 < x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

と定める．

(1)　$F'(x)$ を求めよ．

(2)　$F'(x) \leqq 0$ となる x の範囲を求めよ．

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

♠ 文系学部

1　実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す．たとえば，$[2]=2$, $\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$, $[-2.1]=-3$ である．

(1)　$n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ．

(2)　$[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(3)　x は (2) で求めた範囲にあるものとする．$x^2-5[x]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ．

2　a を正の実数，b と c を実数とし，2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ 4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおく．C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とする．

(1)　b の値を求め，c を a で表せ．

(2)　ℓ_1 と ℓ_2 の交点の座標を a で表せ．

(3)　放物線 C と接線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ．

3　a, b を実数とし，xy 平面上の 3 直線を

$$\ell : x+y=0,\quad \ell_1 : ax+y=2a+2,\quad \ell_2 : bx+y=2b+2$$

で定める．

(1)　直線 ℓ_1 は a の値によらない 1 点 P を通る．P の座標を求めよ．

(2)　ℓ, ℓ_1, ℓ_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ．

(3)　a, b は (2) で求めた条件を満たすものとする．点 $(1,\ 1)$ が (2) の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め，それを ab 平面上に図示せよ．

4　n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする．1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する．これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく．たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている．これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する．1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す．同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する．このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする．

(1)　s_2 を求めよ．

(2)　s_3 と a_3 を求めよ．

(3)　s_4 と a_4 を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 基本　I 方程式・不等式

2 基本　C 行列

3 標準　II 図形と方程式・B 空間図形

4 やや難　A 場合の数・B 数列

5 やや難　III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1 標準　I 方程式・不等式

2 標準　II 微分積分

3 標準　II 図形と方程式

4 やや難　A 場合の数・B 数列

略解

◇ 理系学部

1　(1)　$n=0,\ 1$

(2)　$0 \leqq x < 2$

(3)　$x=\dfrac{3}{2}$

2　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

3　(1)　$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{18}$

(2)　$a=b=\dfrac{5}{6}$ かつ「$c \leqq \dfrac{1}{3}$ または $\dfrac{13}{3} \leqq c$」

4　(1)　$a_2=q$，　$a_3=q^2+qr+q$

(2)　$s_n=(q+r)(q+r+1)^{n-2}$

(3)　$a_{n+1}-a_n=q(q+r)(a+r+1)^{n-2}$

(4)　$a_n=q(q+r+1)^{n-2}$

5　(1)　$F'(x)=\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}$

(2)　$\pi-\dfrac{a}{2} \leqq x \leqq 2\pi-\dfrac{a}{2}$

(3)　極大値 ：$4\sqrt{2}\sin\dfrac{a}{4}$　$\left(x=\pi-\dfrac{a}{2}\right)$

極小値 ：$4\sqrt{2}\left(1-\cos\dfrac{a}{4}\right)$　$\left(x=2\pi-\dfrac{a}{2}\right)$

◇ 文系学部

1　(1)　$n=2,\ 3$

(2)　$2 \leqq x < 4$

(3)　$x=\sqrt{5},\ \sqrt{10}$

2　(1)　$b=\dfrac{1}{2}$，　$c=-a+\dfrac{7}{2}$

(2)　$\left(0,\ -2a+\dfrac{7}{2}\right)$

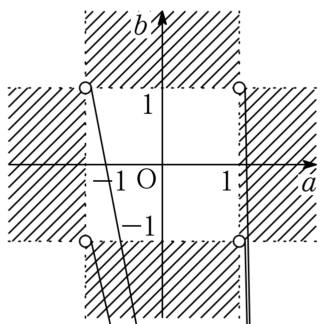
(3)　$a=\dfrac{3}{2}$

3　(1)　$(2,\ 2)$

(2)　$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ かつ $a \neq b$

(3)　$\begin{cases} a<-1,\ 1<a \\ -1<b<1 \end{cases}$ または $\begin{cases} -1<a<1 \\ b<-1,\ 1<b \end{cases}$

右図斜線部分で，境界線上の点は含まない．



4　(1)　$s_2=q+r$

(2)　$s_3=(q+r)(q+r+1)$，　$a_3=q(q+r+1)$

(3)　$s_4=(q+r)(q+r+1)^2$，　$a_4=q(q+r+1)^2$