◀2010 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 a を正の実数とし，2 つの放物線

$C_1 : y = x^2$

$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$

を考える．

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2)　2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = O$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．ただし，E は単位行列，O は零行列である．

(1)　A は逆行列をもつことを示せ．

(2)　$a + d$ と $ad - bc$ を求めよ．

(3)　$b > 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のとき，A を求めよ．

3 正の実数 r と $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して

$$a_0 = r\cos\theta, \quad b_0 = r$$

とおく．a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ．

(2)　$\frac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ．

(3)　$\theta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{r\sin\theta}{\theta}$$

を示せ．

4 $0 \leqq x \leqq 1$ に対して

$$f(x) = \int_0^1 e^{-|t-x|} t(1-t)\,dt$$

と定める．ただし，$e = 2.718\cdots\cdots$ は自然対数の底である．

(1)　不定積分 $I_1 = \int te^t\,dt$，$I_2 = \int t^2 e^t\,dt$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ を x の指数関数と多項式を用いて表せ．

(3)　$f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極大となることを示せ．

5 2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを，1 回に 1 本ずつ，くじがなくなるまで引き続けることにする．

(1)　n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ．

(2)　A, B, C の 3 人が，A, B, C, A, B, C, A, …… の順に，このくじ引きを行うとする．1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ．B と C についても，1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　A, B それぞれがさいころを 1 回ずつ投げる．

（ i ）　同じ目が出たときは A の勝ちとし，異なる目が出たときには大きい目を出した方の勝ちとする．

（ii）　p, q を自然数とする．A が勝ったときは，A が出した目の数の p 倍を A の得点とする．B が勝ったときには，B が出した目の数に A が出した目の数の q 倍を加えた合計を B の得点とする．負けた者の得点は 0 とする．

A の得点の期待値を E_A, B の得点の期待値を E_B とする．以下の問いに答えよ．

(1)　E_A, E_B をそれぞれ p, q で表せ．

(2)　$E_A = E_B$ となる最小の自然数 p と，そのときの E_A の値を求めよ．

3　$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける．

$\{a_1\}$,　$\{a_2,\ a_3,\ a_4\}$,　$\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}$,　……

第 1 群　　第 2 群　　　　第 3 群

k を自然数として，以下の問いに答えよ．

(1)　第 k 群の最初の項を求めよ．

(2)　第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ．

(3)　$(k^2+1)S_k \leqq \dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ．

4　直角三角形 ABC において，$\angle \mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$, AB $= 1$ であるとする．$\angle \mathrm{B} = \theta$ とおく．点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす．AE と CD の交点を F とする．

(1)　$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}$ を θ で表せ．

(2)　△FEC の面積を θ で表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分
2. 標準　$\boxed{\text{C}}$ 行列
3. やや難　$\boxed{\text{III}}$ 関数の極限
4. やや難　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用
5. 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

♣ 文系学部

1. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分
2. 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率
3. 標準　$\boxed{\text{B}}$ 数列
4. 標準　$\boxed{\text{I}}$ 図形と計量・$\boxed{\text{A}}$ 平面図形

略解

◇ 理系学部

1 (1) $y=2(1-a)x-(1-a)^2$

(2) $\dfrac{2}{3}a^3$

2 (1) 証明は省略

(2) $a+d=1,\quad ad-bc=1$

(3) $A=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

3 (1) $\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2},\quad \dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$

(3) 証明は省略

4 (1) $I_1=(t-1)e^t+C_1,\quad I_2=(t^2-2t+2)e^t+C_2$　(C_1, C_2 は積分定数)

(2) $f(x)=3e^{-x}+3e^{x-1}-2x^2+2x-4$

(3) 証明は省略

5 (1) $\dfrac{102-n}{5151}$

(2) A：$\dfrac{103}{303}$，B：$\dfrac{1}{3}$，C：$\dfrac{33}{101}$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ．

2 (1) $E_A=\dfrac{91}{36}p,\quad E_B=\dfrac{35}{36}(q+2)$

(2) $E_A=\dfrac{455}{36}$　$(p=5)$

3 (1) $\dfrac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$

(2) $S_k=\dfrac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$

(3) $k=202$

4 (1) $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}=\cos^2\theta$

(2) $\triangle\mathrm{FEC}=\dfrac{\sin^3\theta\cos^3\theta}{2(1+\cos^2\theta)}$