◀2008 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　α, β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |(x-\alpha)(x-\beta)|$$

とする．

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする．$f(x) = M$ となる x がちょうど 3 つあるとき，実数 α, β と M の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた α, β について，$f(x) - mx = 0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

2　n を自然数とし，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，A の n 乗を $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ と表す．

(1)　$a_n = d_n$ と $b_n = c_n$ を示せ．

(2)　n が奇数ならば a_n は偶数であること，および，n が偶数ならば a_n は奇数であることを示せ．

3　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1}$$

とする．

(1)　$0<x<1$ ならば，$0<f(x)<1$ となることを示せ．

(2)　$f(x) - x = 0$ となる x をすべて求めよ．

(3)　$0<\alpha<1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha,\ \ a_{n+1} = f(a_n)\ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

とする．α の値に応じて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

4　xyz 空間の原点 O と，O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える．
点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}, \sin\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right), \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right), 0\right)$, $(0<\alpha<\pi)$ とする．点 C, D は
$\angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{COB} = \angle\mathrm{DOA} = \angle\mathrm{DOB}$ を満たし，点 C の z 座標は正，点 D の z 座標は負とする．

(1)　点 C の座標を α と $\theta = \angle\mathrm{COA}$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点 C の座標を求めよ．

5　関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする．

(1)　$f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x+t} f(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x) = 0$ のみであることを示せ．

(2)　$g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{x+t} g(t)\,dt + x$ を満たす $g(x)$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　xy 平面において，放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ，$(a, 0)$ と $(a, -a^2+6a)$ を

結ぶ線分を一辺とする長方形を考える．ただし，$0<a<3$ とする．このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする．

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ．

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a を求め，関数 $S(a)$ のグラフをかけ．

2　a を定数とする．xy 平面上の点の集合 $X(a)$, L を次のように定める．

$$X(a)=\left\{(x,\,y)\,|\,(x-a)^2+y^2 \leqq \frac{(a+1)^2}{4}\right\}$$

$$L=\{(x,\,y)\,|\,y=x-1\}$$

(1)　$X(a)\cap L=\emptyset$ となるような a の値の範囲を求めよ．(ただし，$\emptyset$ は空集合を表す．)

(2)　いかなる実数 a に対しても $\mathrm{P}\notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め，xy 平面上に図示せよ．

3　k を実数とし，$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定める．

(1)　$k=2$ のとき，一般項 a_n を求めよ．

(2)　すべての n について $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ を満たす $\alpha,\,\beta$ に対して，$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=1$ が成り立つことを示せ．

(3)　(2) において，異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め，そのときの α と β の値を求めよ．

4　1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える．

(1)　出る目の最小値が 1 である確率を求めよ．

(2)　出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　[I] 2次関数

2　標準　[B] 数列・[C] 行列

3　標準　[III] 数列の極限・微分法の応用

4　標準　[B] ベクトル（空間）

5　標準　[III] 積分法

♣ 文系学部

1　標準　[II] 微分積分

2　標準　[II] 図形と方程式

3　標準　[B] 数列

4　標準　[A] 確率

略解

◇ 理系学部

1 （1） $\alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，　$\beta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$，　$M=\dfrac{1}{2}$

（2） $\dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}$

2 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

3 （1） 証明は省略

（2） $x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

（3）

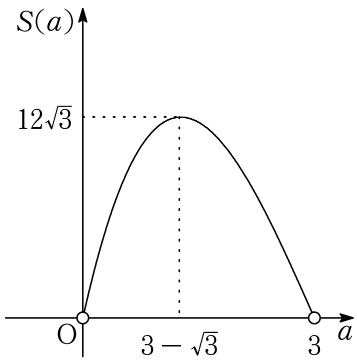
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0 & \left(0<\alpha<\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2} & \left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(\dfrac{1}{2}<\alpha<1\right)\end{cases}$$

4 （1） $\mathrm{C}\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},\ 0,\ \sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}\right)$

（2） $\mathrm{C}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

5 （1） 証明は省略

（2） $g(x)=-\dfrac{2}{e^2-3}e^x+x$



◇ 文系学部

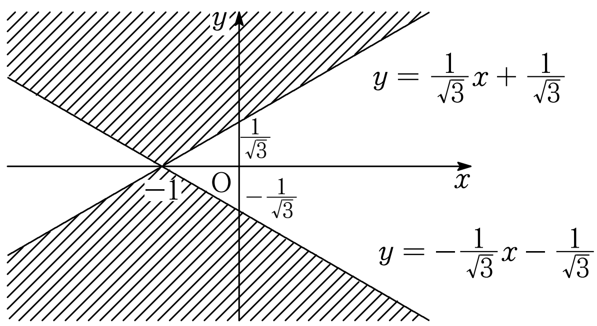
1 （1） $S(a)=2(a^3-9a^2+18a)$

（2） $a=3-\sqrt{3}$，グラフは右図.

2 （1） $a<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<a$

（2） $(x+\sqrt{3}y+1)(x-\sqrt{3}y+1)<0$

求める領域は，右下図の斜線部分で境界線上の点を含まない.



3 （1） $a_n=n-1$

（2） 証明は省略

（3） $k<-2,\ 2<k$，　$\alpha=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$，　$\beta=\dfrac{k\mp\sqrt{k^2-4}}{2}$　（複号同順）

4 （1） $\dfrac{671}{1296}$

（2） $\dfrac{151}{648}$