◀1998 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 中心がそれぞれ，$(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ である半径 1 の円 A, B を考える．円 C が，A を内側に含み，B の外側にあり，しかも，A, B の両方に接しながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 円 C の中心の軌跡を求めよ．

(2) 円 C が直線 $y=2$ に接するとき，C の半径を求めよ．

2 関数 $y=\sqrt{1-(\log x)^2}\ \left(\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e\right)$ のグラフを C とする．次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とし，e はその底とする．

(1) C 上の点 A における C の接線が原点 O$(0,\ 0)$ を通るものとする．このとき，点 A の x 座標を求めよ．

(2) C と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

3 ある駅の待合室に，n 個のいすが横一列に並んでいる．k 人が，どの二人も隣り合わないように，いすにすわる場合の数を，$f(n,\ k)$ とする．$n\geqq 2k-1$ のとき，次を証明せよ．

$$f(n,\ k)={}_{n-k+1}\mathrm{C}_k\times(k!)$$

4 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点 $(a,\ b)$ の集合を式で表し，図示せよ．

$$x-y<0,\ x+y<2,\ ax+by<1$$

5 $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z\ (z\neq 0)$ を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ．

6 無作為に 13 人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を X，土曜日生まれの人の数を Y とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，どの曜日に生まれる確率も $\dfrac{1}{7}$ とする．

(1) $X=k,\ Y=m$ となる確率 $P(X=k,\ Y=m)$ を $k,\ m$ の式として表せ．ただし，$0\leqq k,\ 0\leqq m,\ k+m\leqq 13$ とする．

(2) $P(X=k,\ Y=2)$ が最大となる k を求めよ．

♠ 文系学部

1 正の数 a に対し，関数 $y=x^2-ax\ \left(\dfrac{a}{6}\leqq x\leqq \dfrac{5a}{6}\right)$ のグラフを C とする．長方形 T で，一辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 長方形 T の周の長さの最大値を a を用いて表せ．ただし，長方形の周の長さとは，4 辺の長さの和のことをいう．

(2) 長方形 T の面積の最大値を a を用いて表せ．

2 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$x-y<0,\ x+y<2,\ ax+(2a+3)y<1$$

3 $\dfrac{1}{x}$ の小数部分が $\dfrac{x}{2}$ に等しくなるような正の数 x をすべて求めよ．ただし，正の数 a の小数部分とは，a をこえない最大の整数 n との差 $a-n$ のことをいう．たとえば，3 の小数部分は 0 であり，3.14 の小数部分

は 0.14 である．

4 　複素数平面において，複素数 1, $1+2i$, $2i$, z, w を表す点を，それぞれ，A, B, C, P, Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 P が線分 AB 上を A から B まで動くとき，複素数 z^2 を表す点は，複素数平面上で，どのような図形をえがくか．式で表し，図示せよ．

(2)　△AQC が点 Q を直角の頂点とする直角二等辺三角形になるとき，複素数 w を求めよ．

5 　正の数 a に対し，空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{P}(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$$

を考える．$\angle\mathrm{OPQ}=60^\circ$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　A から 3 点 O, P, Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準　II 図形と方程式・C いろいろな曲線
- **2** 標準　III 積分法の応用
- **3** 基本　I 場合の数
- **4** やや難　II 図形と方程式
- **5** 標準　B 複素数と複素数平面
- **6** 標準　B 確率

♣ 文系学部

- **1** 標準　I 2 次関数
- **2** 標準　II 図形と方程式
- **3** 標準　A 式の計算
- **4** 標準　B 複素数と複素数平面
- **5** 標準　B ベクトル

略解

◇ 理系学部

1 (1) 双曲線 ： $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1,\quad x \leqq -1$

(2) 2, 14

2 (1) $x = e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

(2) $\dfrac{4\pi}{e}$

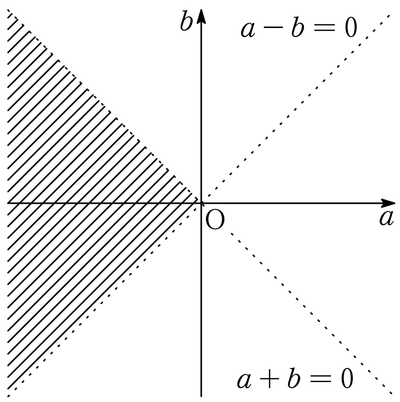
3 証明は省略

4

$$\begin{cases} a + b < 0 \\ a - b < 0 \end{cases}$$

求める点 (a, b) の集合は右図の斜線部分で，

境界線上の点を含まない．

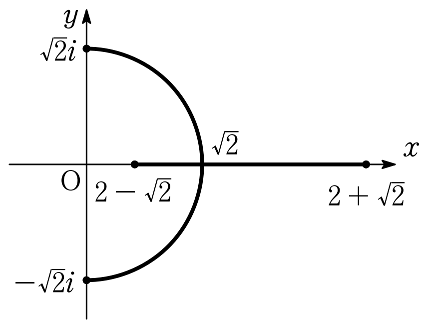


5 z は実数，$2 - \sqrt{2} \leqq z \leqq 2 + \sqrt{2}$ と，$z = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(-90^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$

図は，右図の太実線部分．

6 (1) $P(X = k, Y = m) = \dfrac{13!\cdot 5^{13-k-m}}{k!m!(13-k-m)!\cdot 7^{13}}$

(2) $k = 1, 2$



◇ 文系学部

1 (1)

$$(L\text{ の最大値}) = \begin{cases} a \geqq 3\text{ のとき} & \dfrac{a^2+4}{2} & (t = 1) \\ 0 < a < 3\text{ のとき} & \dfrac{5a^2+24a}{18} & \left(t = \dfrac{a}{3}\right) \end{cases}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3 \quad \left(t = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)$

2 $-3 < a < -1$

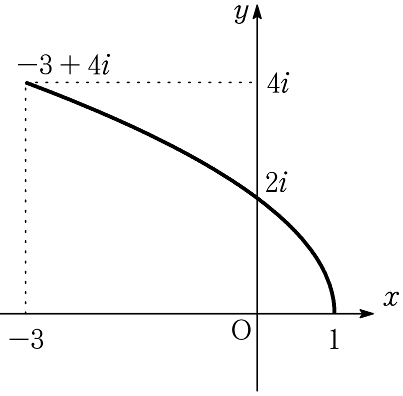
3 $x = \sqrt{n^2+2} - n$（n は 0 以上の整数）

4 (1)

$x = 1 - \dfrac{1}{4}y^2$ $(0 \leqq y \leqq 4)$

右図の太実線部分．

(2) $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i,\quad \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$



5 (1) $a = 1$

(2) $\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$