◀1997 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　実数 x に対して，x 以下の整数のうちで最大のものを $[x]$ と書くことにする．$c>1$ として，
$a_n=\dfrac{[nc]}{c}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおく．以下の (1), (2), (3) を証明せよ．

(1)　すべての n に対して，$[a_n]$ は n または $n-1$ に等しい．

(2)　c が有理数のときは，$[a_n]=n$ となる n が存在する．

(3)　c が無理数のときは，すべての n に対して $[a_n]=n-1$ となる．

2

(1)　p を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を C とする．C 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$（ただし $x_0\neq 0$）を考え，点 Q と F を通る直線を l_1，点 Q を通り放物線 C の主軸に平行な直線を l_2 とする．このとき，点 Q における C の接線 l は，l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示せ．

(2)　放物線 $y=x^2-2\sqrt{2}x+4$ 上の点 $\mathrm{R}(a,\ b)$ $(a>\sqrt{2})$ における接線と直線 $x=a$ のなす角を θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とする．点 R を通り傾きが $\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

3　p を 0 でない実数とする．数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ を次のように定義する．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=pa_n+p^{-n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

(1)　$|p|=1$ のとき，a_n を求めよ．

(2)　$|p|\neq 1$ のとき，a_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

4　a を実数として，関数 $f(x)=\{x^2-(a+2)x+a+2\}e^x$ を考える．

(1)　$a\neq 0$ のとき，$f(x)$ の極小値を b とする．b を a で表せ．

(2)　(1) で求めた b を a の関数とみて，$b=g(a)$ と表す．ただし，$a=0$ のとき $g(0)=2$ と定める．このとき，関数 $b=g(a)$ のグラフと a 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

5　複素数 $\alpha,\ \beta$（ただし，$\alpha\beta\neq 0$）が与えられている．$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$（$a,\ b,\ c,\ d$ は実数，$i=\sqrt{-1}$）とおく．

(1)　複素数 z_0 を，$\overline{\alpha}+\beta\neq 0$ の場合は $z_0=(b-d)+(a+c)i$ と定め，$\overline{\alpha}+\beta=0$ の場合は $z_0=-a+bi$ と定める．$|\alpha|=|\beta|$ のとき，z_0 は z の方程式 $\alpha z+\beta\overline{z}=0$ の解であって，$z_0\neq 0$ となることを示せ．

(2)　$|\alpha|\neq|\beta|$ のとき，z の方程式

$$\alpha z+\beta\overline{z}+1=0\ \cdots\cdots①$$

の解の実部と虚部を $a,\ b,\ c,\ d$ で表せ．

(3)　$|\alpha|=|\beta|$ かつ方程式 ① がある複素数 z_1 を解にもつとする．このとき，① は z_1 と異なる解をもつことを示せ．

6　3 個のさいころを同時に振る試行において，出た目の数の積が 4 で割り切れる事象を A とする．

(1)　事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ．

(2)　この試行を 4 回繰り返したとき，事象 A が 2 回以上起こる確率を求めよ．

(3)　この試行を n 回繰り返したとき，事象 A が k 回起これば $X=3^k$ で確率変数 X を定義する．このとき，X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　平面上に原点 O を中心とする半径 r の円 C と点 $\mathrm{A}(r,\,0)$ がある．y 軸に平行な直線 $x=r$ 上に点 $\mathrm{P}(r,\,t)$ をとる．ただし，$t \neq 0$ とする．

(1)　点 P を通り，円 C と接する直線で直線 PA と異なるものを l とする．l と円 C との接点を T とするとき，点 T の座標を $r,\,t$ を用いて表せ．

(2)　線分 AT と線分 OP との交点を Q とする．点 P が直線 $x=r$ の第 1 象限にある部分を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

2　近似値 $\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$ を利用して，次の問いに答えよ．

(1)　18^{35} の桁数を求めよ．

(2)　18^{35} の最高位の数字が 8 であることを示せ．

3　O を原点とする座標平面上に，点 $\mathrm{A}(a,\,0)$ を中心とする半径 1 の円 C がある．ただし，$a \geqq 0$ とする．C と x 軸との交点のうち右側にあるものを B とする．$0^\circ < \theta \leqq 45^\circ$ とし，第 1 象限内で，円 C 上に 2 点 P, Q を $\angle\mathrm{PAB}=\theta,\ \angle\mathrm{QAB}=2\theta$ となるようにとる．P から y 軸に下ろした垂線を PP$'$ とし，Q から x 軸に下ろした垂線を QQ$'$ とする．OP$'$ と OQ$'$ を 2 辺とする長方形の面積 S について考える．

(1)　$t=\sin\theta$ とおくとき，S を a と t で表せ．

(2)　θ が $0^\circ < \theta \leqq 45^\circ$ の範囲を動くとき，S の最大値とそのときの t の値を a で表せ．

4　0 でない複素数 z に対し，$w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$ とおく．このとき，w の実部が正になるような z の範囲を複素数平面上に図示せよ．

5　原点を O とする平面において，点 $\mathrm{A}(0,\,2)$ とベクトル $\vec{c}=(1,\,-2)$ をとり，ベクトル方程式

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{c}$$

で表される直線を l とする．原点 O を発した光が，l 上の点 $\mathrm{Q}(a,\,b)$ で l にあたって反射するとき，その反射光のなす半直線を l' で表す．ただし，光は直進し，線分 OQ と l のなす角度は l' と l のなす角度と等しくなるように反射するものとする．

(1)　直線 l に関して O と対称な点 O$'$ の座標を求めよ．

(2)　半直線 l' を含む直線のベクトル方程式が

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\vec{d}$$

となるようなベクトル $\vec{d}$ を一つ求め，その成分を a を用いて表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　I　有理数と無理数
2. 標準　C　いろいろな曲線
3. 標準　III　数列の極限
4. 標準　III　積分法の応用
5. 標準　B　複素数と複素数平面
6. 標準　I　確率

♣ 文系学部

1. 標準　II　図形と方程式
2. 標準　II　指数関数・対数関数
3. 標準　II　三角関数・微分積分
4. 標準　B　複素数と複素数平面
5. 標準　B　ベクトル

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略，定点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

3 (1)

$$\begin{cases} p=1 \text{ のとき} & a_n = n \\ p=-1 \text{ のとき} & a_n = (-1)^{n+1}n \end{cases}$$

(2) $a_n = \dfrac{p^{2n}-1}{(p^2-1)p^{n-1}}$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1 & (p=1) \\ -1 & (p=-1) \\ \dfrac{1}{p} & (|p|<1) \\ p & (|p|>1) \end{cases}$$

4 (1)

$$b = \begin{cases} a+2 & (a<0) \\ (2-a)e^a & (a>0) \end{cases}$$

(2) e^2-1

5 (1) 証明は省略

(2) $p = \dfrac{c-a}{a^2+b^2-c^2-d^2}$，　$q = \dfrac{b+d}{a^2+b^2-c^2-d^2}$

(3) 証明は省略

6 (1) $P(A) = \dfrac{5}{8}$

(2) $\dfrac{3475}{4096}$

(3) $E(X) = \left(\dfrac{9}{4}\right)^n$

◇ 文系学部

1 (1) $\mathrm{T}\left(\dfrac{r(r^2-t^2)}{r^2+t^2},\ \dfrac{2tr^2}{r^2+t^2}\right)$

(2) 円 $\left(x-\dfrac{r}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{r}{2}\right)^2$ の $y>0$ の部分

2 (1) 44 桁

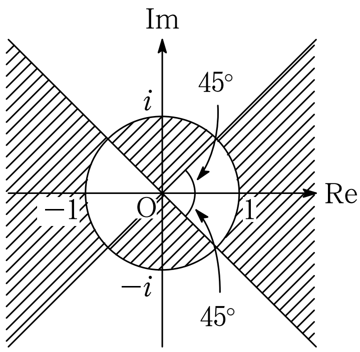
(2) 証明は省略

3 (1) $S=-2t^3+(a+1)t$

(2)
$$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき} & \text{最大値 } \dfrac{\sqrt{6}(a+1)\sqrt{a+1}}{9} & \left(t=\sqrt{\dfrac{a+1}{6}}\right) \\ a>2 \text{ のとき} & \text{最大値 } \dfrac{a}{\sqrt{2}} & \left(t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} r^2-1>0 \text{ かつ } \cos 2\theta>0 \\ \text{または} \\ r^2-1<0 \text{ かつ } \cos 2\theta<0 \end{cases}$$

右図の斜線部分で，境界線上の点は含まない．



5 (1) $\mathrm{O}'\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

(2) $\vec{d}=(5a-8,\ 6-10a)$