◀1996 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　一枚の硬貨を投げて，A 君と B 君が次のようなゲームを行う．ゲーム開始時における A 君，B 君の得点はともに 0 点とする．毎回の硬貨投げの試行で表がでたとき A 君の勝ち，裏がでたとき B 君の勝ちとし，勝った方に ＋1 点，負けた方に －1 点がそれまでの得点に加えられるとする．

各試行は独立としてこの試行を続けたとき，次の問いに答えよ．ただし，硬貨の表と裏のでる確率は，ともに $\dfrac{1}{2}$ である．また，n と m はともに 1 以上の整数とする．

(1)　3 回の試行の後，A 君の得点が 1 点である場合の数を求めよ．

(2)　$2n$ 回の試行の後，A 君の得点が $2m$ 点である場合の数を求めよ．

(3)　$2n$ 回の試行の後，A 君の得点が $2m$ 点とする．試行開始後 A 君の得点がつねに B 君の得点より多い確率を求めよ．

2　曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=-1$ と交点をもたないものとする．点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線は直線 $y=-1$ と交点をもち，その交点の x 座標を $g(t)$ とする．

$g(t)$ が $\dfrac{dg(t)}{dt}=1,\ g(1)=0$ をみたしているとき，次のそれぞれの場合に関数 $f(x)$ を表す式を求めよ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通る場合．

(2)　曲線 $y=f(x)$ がある点で曲線 $y=x^2-4$ と接する場合．
ただし，2 つの曲線が点 $(a,\ b)$ で接するとは，$(a,\ b)$ が 2 つの曲線上にあり，かつ $(a,\ b)$ における 2 つの曲線の接線が等しいことをいう．

3　平面上で原点 O と異なる定点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ へはかった角 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる範囲にあるものとし，$w=\dfrac{ay-bx}{ax+by}$ とおく．2 点 X, Y の間の距離を XY で表すものとする．

(1)　$ay-bx$ および w を OA, OP, θ で表せ．

(2)　定数 k を $0<k<\mathrm{OA}$ とする．$0<\mathrm{AP}\leqq k$ であるとき，w のとりうる値の範囲を $a,\ b,\ k$ を用いて表せ．

4　次の問いに答えよ．

(1)　数学的帰納法により次の不等式を証明せよ．ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする．

$$\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geqq\frac{n}{2}+1$$

(2)　次の命題は真か偽か．真ならば証明し，偽ならばその例をあげ理由を説明せよ．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ ならば 数列 $\{a_n\}$ は収束する．

5　a を $0\leqq a<1$ の範囲の数とする．

$$F(a)=\int_1^2\left|\log(x-a)\right|dx$$

とおくとき，$F(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ．

♠ 文系学部

1　p, q は実数で $p>0$ とし，$f(x)=x^3-3p^2x+q$ とおく．方程式 $f(x)=0$ が実数解 α, β で $\alpha<\beta$ かつ α が重複解となるものをもつとき，次の問いに答えよ．

(1)　q, α, β をそれぞれ p を使って表せ．

(2)　x 軸と曲線 $y=f(x)$, $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ で囲まれた図形の面積が $2p$ に等しいとき，p の値を求めよ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　円 $x^2+y^2=25$ と直線 $x+2y=10$ との交点を求めよ．

(2)　連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ x+2y \leqq 10 \end{cases}$$

の表す領域を点 (x, y) が動くとき，$mx+y$ のとる値の最大値を m を使って表せ．ただし，m は実数で $m>0$ とする．

3　行列 $A=\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 9 & a \end{pmatrix}$ の表す平面の 1 次変換を T とするとき，T は次の条件（イ），（ロ）をみたすとする．

（イ）　T は格子点を格子点に移す．

（ロ）　T によって格子点に移される点は格子点にかぎる．

ここに格子点とは座標が整数の組となる平面の点をいう．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　k を正の整数とする．4 点 $(0, 0)$, $(8k, 9k)$, $(9k, ak)$, $(17k, (9+a)k)$ を結んでできる平行四辺形の（辺および頂点を除く）内部に含まれる格子点の個数を求めよ．

4　数列 $\{a_n\}$ $(n \geqq 1)$ は，1 以上のすべての整数 m, n に対して次の関係式をみたすとする．

$$(n+2m)a_n-(m+2n)a_m+(m-n)a_{n+m}=0$$

(1)　$a_1=0, a_2=6$ とするとき，一般項 a_n を求めよ．

(2)　$a_1=1, a_2=2$ とするとき，一般項 a_n を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |やや難| 確統 場合の数・確率

2 |標準| 微積 微分方程式

3 |標準| 代幾 ベクトル

4 |標準| 基解・微積 数列・数列の極限

5 |標準| 微積 積分法

♣ 文系学部

1 |標準| 基解 微分積分

2 |標準| I 図形と方程式

3 |標準| 代幾 1 次変換

4 |標準| 基解 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) 3 通り

(2) $\dfrac{(2n)!}{(m+n)!(n-m)!}$ 通り

(3) $\dfrac{m}{n}$

2 (1) $f(x)=2e^x-1$

(2) $f(x)=-2e^{x+1}-1$,　$f(x)=6e^{x-3}-1$

3 (1) $ay-bx=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\sin\theta$,　$w=\tan\theta$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $0<w\leqq\dfrac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}}$

4 (1) 証明は省略

(2) 偽 ： 反例 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$（理由は省略）

5 最小値 $\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}$　$\left(a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

◇ 文系学部

1 (1) $q=-2p^3$,　$\alpha=-p$,　$\beta=2p$

(2) $p=\dfrac{2}{3}$

2 (1) $(0,5)$, $(4,3)$

(2)

最大値 ： $\begin{cases} 5 & \left(0<m\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ 4m+3 & \left(\dfrac{1}{2}<m\leqq\dfrac{4}{3}\right) \\ 5\sqrt{m^2+1} & \left(m>\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$

3 (1) $a=10$

(2) $(k-1)^2$ 個

4 (1) $a_n=(n-1)n(n+1)$ $(n\geqq1)$

(2) $a_n=n$ $(n\geqq1)$