◀2015 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする．k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$ を C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする．点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする．次の問いに答えよ．

(1)　$k,\ q,\ r$ の値を求めよ．

(2)　曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3)　$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4)　円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

2　座標平面上の放物線

$$C_n : y=x^2-p_nx+q_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える．ただし，$p_n,\ q_n$ は

$${p_1}^2-4q_1=4,\quad {p_n}^2-4q_n>0 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

を満たす実数とする．C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする．また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1)　C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$p_n=n\sqrt{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である．

3　座標空間内に 5 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}(s,\ t,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ u,\ 0)$$

がある．ただし，$s,\ t,\ u$ は実数で，$s>0,\ t>0,\ s+t=1$ を満たすとする．3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1)　直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(2)　u を t を用いて表せ．また，$0<u<1$ であることを示せ．

(3)　点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする．点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ．

4　$a,\ b,\ p$ は $a>0,\ b>0,\ p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y=e^x,\quad C_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1)　p を a を用いて表せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

5　m, n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$m \geqq 2, n \geqq 2$ とする．異なる m 種類の文字から重複を許して n 個選び，1 列に並べる．このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(2)　$n \geqq 3$ とする．3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる．このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ．

(3)　$n \geqq 3$ とする．n 人を最大 3 組までグループ分けする．このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ．ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする．たとえば，$n = 3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は

$$\{(\mathrm{A, B, C})\},\ \{(\mathrm{A, B}), (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A, C}), (\mathrm{B})\},\ \{(\mathrm{B, C}), (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}), (\mathrm{B}), (\mathrm{C})\}$$

の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である．

(4)　(3) の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ．

♠ 文系学部

1　a, b, c を実数とし，$a < 1$ とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^2 - x,\quad C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える．C_1 と C_2 は，点 P(1, 0) と，それとは異なる点 Q を通る．また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする．点 P における C_1 の接線を l_1，点 Q における C_1 の接線を l_2，点 Q における C_2 の接線を l_3 とする．次の問いに答えよ．

(1)　b, c および点 Q の座標を a を用いて表せ．

(2)　l_1, l_2, l_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ．

(3)　l_1, l_2, l_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ．

2　n を自然数とし，p_n, q_n を実数とする．ただし，p_1, q_1 は ${p_1}^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n, β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n < \beta_n$ とする．$c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1)　$r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n, r_{n+1} を用いて表せ．

(2)　c_n を n の式で表せ．

(3)　$p_n = n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

3　座標平面上に原点 O と 2 点 A(1, 0), B(0, 1) をとり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．点 C は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$, $0^\circ < \angle \mathrm{AOC} < 90^\circ$, $0^\circ < \angle \mathrm{BOC} < 90^\circ$ を満たすとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ．

(2)　線分 AB と線分 OC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ．

(3)　点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする．D は (2) で定めた点とする．このとき，$\triangle$OBD と $\triangle$CDE の面積の和を t を用いて表せ．

4　α, β は $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする．三つの放物線

$$C_1 : y = x(1-x), \quad C_2 : y = x(1-\beta-x), \quad C_3 : y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える．C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする．また，C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1)　γ を α, β を用いて表せ．

(2)　S を α, β を用いて表せ．

(3)　α, β が $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ．

5　n を自然数とする．A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける．最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける．n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする．ここで，たとえば，A → C → D → A → E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える．次の問いに答えよ．

(1)　p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ．

(2)　p_n を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　|標準|　III　積分法の応用

2　|やや難|　III　数列の極限

3　|基本|　B　ベクトル（空間）

4　|標準|　III　極限・２次曲線・微分法の応用

5　|やや難|　A　確率

♣ 文系学部

1　|やや難|　II　微分積分

2　|やや難|　B　数列

3　|標準|　B　ベクトル（平面）

4　|標準|　II　微分積分

5　|標準|　A　確率・B　数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $k = 1 + \sqrt{2},\ q = 1 + \sqrt{2},\ r = 1$

(2) $S = (1 + \sqrt{2}) \log(1 + \sqrt{2})$

(3) $\dfrac{\pi}{2}$

(4) $V = \pi\left(\pi + \dfrac{4\sqrt{2}}{3} - 2\right)$

2 (1) $-\dfrac{{l_n}^2}{4}$

(2) $l_n = (n+1)\sqrt{n}$

(3) $\dfrac{1}{2}$

3 (1) $\dfrac{3}{2}$

(2) $u = \dfrac{3t}{1 + 2t}$，証明は省略

(3) $t = \dfrac{4}{5}$

4 (1) $p = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$

(2) $\dfrac{1}{2}$

(3) e

5 (1) $m(m-1)(2^{n-1} - 1)$（通り）

(2) $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$（通り）

(3) $p_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}$

(4) $n \geqq 6$

◇ 文系学部

1 (1) $b=-a-1$, $c=2a$, $\mathrm{Q}(a,\ a^2-a)$

(2) $a=-1$

(3) 2 個

2 (1) $\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}$

(2) $c_n=\sqrt{n}(n+1)$

(3) $q_n=-\dfrac{2n^2+n}{4}$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\vec{a}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t+\sqrt{1-t^2}}\vec{b}$

(3) $\dfrac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}\left\{1+2(1-t)\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\right\}$

4 (1) $\gamma=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

(2) $S=\dfrac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}$

(3) 最大値：$\dfrac{1}{32}$ $\left(\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}\right.$ のとき$\left.\right)$

5 (1) $p_1=\dfrac{1}{4}$, $p_2=\dfrac{3}{16}$, $p_3=\dfrac{13}{64}$, $p_4=\dfrac{51}{256}$

(2) $p_n=\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$