◀2014 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a, b を実数，$a > 0$ として，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める 1 次変換を f とする．f によって，点 P (1, 0) が点 $\mathrm{P_1}$ に移され，点 $\mathrm{P_1}$ が点 $\mathrm{P_2}$ に移されるものとする．P が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a, b を求めよ．

(2)　ある実数 c に対して $c\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = (v_1, v_2)$ とすると，

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．c を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}} = (w_1, w_2)$ とする．すべての自然数 n に対して

$$A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

(4)　(2) と (3) の v_1, v_2, w_1, w_2 に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s(v_1, v_2) + t(w_1, w_2)$ となる実数 s, t を求め，$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ．ただし，n は自然数である．

2　二つの関数 $f(x) = x\sin x$，$g(x) = \sqrt{3}x\cos x$ について次の問いに答えよ．ただし，(3) と (4) において，a および $h(x)$ は (2) で定めたものとする．

(1)　2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるものをすべて求めよ．

(2)　(1) で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a, f(a))$ とする．点 A における曲線 $y = g(x)$ の接線を $y = h(x)$ と表す．$h(x)$ を求めよ．

(3)　$0 \leqq x \leqq a$ のとき，$h(x) \geqq g(x)$ であることを示せ．

(4)　$0 \leqq x \leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y = g(x)$，および直線 $y = h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

3　四面体 OABC において OA = OB = OC = AB = AC = 1 とする．△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とし，辺 OA の中点を M とする．また，$\angle \mathrm{BOC} = 2\theta$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{FG}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ．

(3)　△MBC の面積を θ を用いて表せ．

4　$\alpha > 1$ とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$a_n > 1$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2)　$\sqrt{x} - 1 \leqq \frac{1}{2}(x - 1)$　（ただし，$x \geqq 0$ とする．）

(3)　$a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

5　1 辺の長さが 1 の正六角形において，頂点を反時計回りに P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 とする．1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする．P_1, P_j, P_k が異なる 3 点となるとき，この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする．P_1, P_j, P_k が異なる 3 点とならないときは，$S=0$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　$S>0$ となる確率を求めよ．

(2)　S が最大となる確率を求めよ．

(3)　S の期待値を求めよ．

♠ 文系学部

1　座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．C の外部にある点 $\mathrm{P}(a, b)$ から C にひいた 2 本の接線と C との接点を H, H$'$ とする．$\angle\mathrm{OPH}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　PH の長さ，および $\sin\theta$ を a, b を用いて表せ．

(2)　$\mathrm{HH}'=\mathrm{OP}$ となるような点 P の軌跡を求めよ．

2　a_1, a_2, a_3 は定数で，$a_1>0$ とする．放物線 $C: y=a_1x^2+a_2x+a_3$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線を ℓ とし，ℓ と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ とする．a_1, a_2, a_3, a_4 がこの順に等差数列であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_2, a_3, a_4 を a_1 を用いて表せ．

(2)　q の値を求めよ．

(3)　放物線 C，接線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする．$S=q$ となるとき，a_1 を求めよ．

3　四面体 OABC において，△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{FG}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ．

(3)　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ のとき，FG の長さを求めよ．

4　理系学部 **4** と同じ．

5　正六角形の頂点を反時計回りに P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 とする．1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする．次の問いに答えよ．

(1)　P_1, P_j, P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ．

(2)　P_1, P_j, P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ．

(3)　P_1, P_j, P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{B}}$ 数列・$\boxed{\text{C}}$ 行列・1 次変換
- **2** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用
- **3** 基本 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
- **4** 標準 $\boxed{\text{B}}$ 数列
- **5** 基本 $\boxed{\text{A}}$ 確率

♣ 文系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **2** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分・$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **3** 基本 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
- **4** 標準 $\boxed{\text{B}}$ 数列
- **5** 基本 $\boxed{\text{A}}$ 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a=2,\ b=-3$

(2) $c=2$

(3) 証明は省略

(4) $s=\dfrac{1}{3},\ t=-\dfrac{1}{3},\ A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4-(-2)^n\\-2-(-2)^{n+1}\end{pmatrix}$

2 (1) $\left(-\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

(2) $h(x)=\dfrac{\sqrt{3}-\pi}{2}x+\dfrac{\pi^2}{6}$

(3) 証明は省略

(4) $\dfrac{\pi^2}{36}(\pi+\sqrt{3})-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

(2) 証明は省略

(3) $\triangle\mathrm{MBC}=\dfrac{\sin\theta}{2}\sqrt{1+2\cos 2\theta}$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $\dfrac{5}{9}$

(2) $\dfrac{1}{18}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

◇ 文系学部

1 (1) $\mathrm{PH}=\sqrt{a^2+b^2-1}$,　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) 原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

2 (1) $a_2=-3a_1$,　$a_3=-7a_1$,　$a_4=-11a_1$

(2) $q=11$

(3) $a_1=\dfrac{33}{8}$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

(2) 証明は省略

(3) $\mathrm{FG}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $\dfrac{5}{9}$

(2) $\dfrac{1}{18}$

(3) $\dfrac{1}{3}$