◀2012 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって，2 点 P$(1,\ 1)$, Q$(2,\ 2)$ は連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2$, $1 \leqq y \leqq 2$ の表す領域内の点 P′, Q′ にそれぞれ移されるものとする．ただし，a, b, c, d は正の実数で $a > c$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1)　$a+b=1$ および $c+d=1$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　4 点 O$(0,\ 0)$, R$(a,\ c)$, S$(a+b,\ c+d)$, T$(b,\ d)$ を頂点とする平行四辺形 ORST の面積を p とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$A\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3)　自然数 n に対して，a_n, b_n, c_n, d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める．このとき a_n, b_n, c_n, d_n を b, c, n および (2) の p を用いて表せ．

(4)　$A^3=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ．

2　a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n について $x_n=a$ となるとき，a を求めよ．

(2)　$a<1$ のとき，$x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　$0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

3　関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(3)　$\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく．正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$, 3 直線 $x=t$, $x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ．

(4)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ の値を求めよ．

4　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件

$$(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|$ を θ を用いて表せ．

(3)　三角形 ABC の周の長さ AB + BC + CA を最大にする θ を求めよ．

5　n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする．

規則：

（A）　P は，はじめに点 $(1,\,2)$ にある．

（B）　さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに 120° 回転し，3 以上の目が出れば時計回りに 60° 回転する．

（C）　（B）を n 回繰り返す．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

(1)　$n=3$ のとき，出た目が 4, 1, 2 であったとする．このとき P が最後に移った点の座標を求めよ．

(2)　$n=3$ のとき，P が点 $(1,\,2)$ にある確率を求めよ．

(3)　$n=6$ のとき，P が点 $(-1,\,-2)$ にある確率を求めよ．

(4)　$n=3m$ のとき，P が点 $(1,\,2)$ にある確率を求めよ．ただし，m は自然数とする．

♠ 文系学部

1　$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の定義域を求めよ．

(2)　不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け．

(3)　関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ．

(4)　(3) の m について，1000^m の整数部分の桁（けた）数を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．

2　放物線 $C : y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ 上に 2 点 A, B があり，A の x 座標は 3 である．点 A，点 B における C の接線をそれぞれ $\ell,\,m$ とし，ℓ と m の交点を P とおくと，$\angle \mathrm{APB}=45^\circ$ であった．次の問いに答えよ．

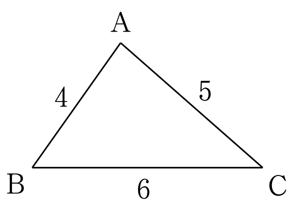
(1)　接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2)　接線 m の傾きを求めよ．

(3)　点 P の座標を求めよ．

(4)　$C,\,\ell,\,m$ で囲まれた図形において，不等式 $x \geqq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ．

3　図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある．次の問いに答えよ．



(1)　$45^\circ < \angle \mathrm{B} < 60^\circ$ を証明せよ．

(2)　$\angle \mathrm{A}=2\angle \mathrm{C}$ を証明せよ．

(3)　$40^\circ < \angle \mathrm{C} < 45^\circ$ を証明せよ．

4　N は 4 以上の整数とする．次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる．

規則：　出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

(1)　さいころを投げる回数は，最大で何回か．

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ．

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ．

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ．

(5)　$N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ．

5　n は 3 以上の整数とする．1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 $x,\ x+1$ を取り除く．次の問いに答えよ．

(1)　$n=17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\dfrac{42}{5}$ であるとする．取り除いた 2 つの整数を求めよ．

(2)　$n \geqq 39$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)>\frac{205}{11}(n-2)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3)　残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\dfrac{205}{11}$ であるとする．n と取り除いた 2 つの整数を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　やや難　C　行列・1次変換
- **2**　標準　B　数列
- **3**　標準　III　関数の極限・微分法の応用
- **4**　標準　B　ベクトル（平面）
- **5**　やや難　A　確率

♣ 文系学部

- **1**　標準　II　対数関数
- **2**　標準　II　微分積分
- **3**　標準　A　平面図形
- **4**　標準　A　確率
- **5**　やや難　I　整数

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $a_n = 1$,　$b_n = bp^n$,　$c_n = 1$,　$d_n = -cp^n$

(4) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2 (1) $a = 0, 1, 2$

(2) 証明は省略

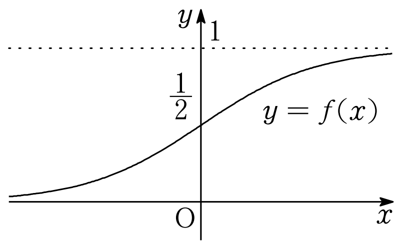
(3) 証明は省略

3 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

(2) $f(x)$ のグラフは，単調増加で，

$x < 0$ で下に凸，$x > 0$ で上に凸である．

グラフは右図のようになる．



(3) $S(t) = t - \log(1 + e^t) + \log 2$

(4) $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = \log 2$

4 (1) 証明は省略

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$,　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

5 (1) 点 $(-1, -2)$

(2) $\dfrac{13}{27}$

(3) $\dfrac{364}{729}$

(4) $\dfrac{1}{2}\left\{1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

◇ 文系学部

1 (1) $1 < x < 4$

(2) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

(3) $2^{m-2} = \dfrac{9}{16}$

(4) 4 桁

2 (1) $y = 3x - 5$

(2) -2

(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$

(4) $\dfrac{31}{8}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $(N+2)$ 回

(2) $\dfrac{1}{8}$

(3) $\dfrac{N^2-3N+4}{2^{N+1}}$

(4) $\dfrac{N^2+5N+8}{2^{N+3}}$

(5) $\dfrac{77}{16}$

5 (1) 13 と 14

(2) 証明は省略

(3) $n = 35$，7 と 8