◀2011 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　実数 a, b に対して，2 次正方行列 A と列ベクトル B を

$$A=\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+B$$

により，座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し点 $\mathrm{P}'(x', y')$ が定まるものとする．次の問いに答えよ．

(1)　$a=b=-1$ のとき，点 $\mathrm{P}'(3, 2)$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ を求めよ．

(2)　$A^2=kE$ (k は実数) を満たすとき，a, k の値を求めよ．

(3)　どんな点 P に対しても点 P′ が原点 O に一致しないための a, b の条件を求めよ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ．

(2)　p, q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ．

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ．

3　次の問いに答えよ．

(1)　a, b, c を定数とする．関数 $f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ．

(2)　関数

$$g(x)=4\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\frac{5}{2}\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

が最大値をとる x の値を θ とする．$\cos 2\theta, \sin 2\theta$ の値を求めよ．

(3)　(2) の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^\theta g(x)\,dx$ を求めよ．

4　平面上で，線分 AB を 1：2 に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする．点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする．円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}, \overrightarrow{\mathrm{PC}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ．

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ．

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \theta$ で表せ．

(4)　$\mathrm{PA}=3, \mathrm{PB}=2$ とする．$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ．

5　△ABC の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする．点 A を出発した石が，次の規則で動くとする．

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏が出たときは動かない．
ただし，コインを投げて表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする．

コインを n 回投げたとき，石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　a_1, b_1, c_1 の値を求めよ．

(2)　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n で表せ．また，a_2, b_2, c_2 および a_3, b_3, c_3 の値を求めよ．

(3)　a_n, b_n, c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ．

(4)　(3) において一致する値を p_n とする．p_n を n で表せ．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．不等式

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} < \frac{6}{a} + \frac{k}{b}$$

を満たす k の値の範囲を求めよ．

(2)　a, b は定数で，$a > 0$ とする．2 次関数 $f(x) = ax^2 - 2x + b$ の定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とし，$f(-1) < f(2)$ を満たすとする．関数 $y = f(x)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 7$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　放物線 $F : y = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，A における F の接線に垂直な直線を ℓ とし，ℓ と放物線 F との交点のうち点 A と異なる方を $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{2}(b+1)^2\right)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　直線 ℓ の方程式と b の値を求めよ．

(2)　放物線 F と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 T_1 を求めよ．

(3)　線分 AB を直径とする円を C とする．このとき，不等式 $y \leqq \dfrac{1}{2}(x+1)^2$ の表す領域で円 C の内部にある部分の面積 T_2 を求めよ．

4　平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O，線分 AB を $1:4$ に外分する点を C とする．P を直線 AB 上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ で表せ．

(3)　$\mathrm{PA} = 1$, △PAB の面積が $\dfrac{3}{2}$ のとき，PB の長さを求めよ．

5　さいころを n 回投げる．k 回目 $(k = 1, 2, \cdots, n)$ に投げた結果，

1 または 2 の目が出たとき $X_k = 2$,

3 または 4 の目が出たとき $X_k = 3$,

5 または 6 の目が出たとき $X_k = 5$

とする．これらの積を $Y = X_1X_2\cdots X_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $n=5$ のとき，Y が偶数になる確率 p_1 を求めよ．

(2) $n=5$ のとき，Y が 100 の倍数になる確率 p_2 を求めよ．

(3) $n=2$ のとき，Y の期待値 E を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 $\boxed{\text{C}}$ 行列・1次変換

2 標準 $\boxed{\text{A}}$ 論証・$\boxed{\text{II}}$ 指数関数・対数関数

3 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

4 やや難 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）

5 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列

♣ 文系学部

1 標準 $\boxed{\text{I}}$ 不等式・2次関数

2 標準 $\boxed{\text{A}}$ 論証・$\boxed{\text{II}}$ 指数関数・対数関数

3 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

4 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）

5 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

(2) $a=-2,\quad k=0$

(3) $a=1$ かつ $b \neq 0$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 5

3 (1) $a=c$ かつ $b=0$

(2) $\cos 2\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$，$\sin 2\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

(3) $\frac{1}{2}$

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

(2) 証明は省略

(3) $\mathrm{PQ} = \dfrac{\left|\vec{b}\right| - 4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3}$

(4) $\triangle\mathrm{PAB} = 2\sqrt{2}$

5 (1) $a_1 = \frac{1}{2}$，$b_1 = \frac{1}{2}$，$c_1 = 0$

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}a_n,\quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n,\quad c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$

$a_2 = \frac{1}{4},\quad b_2 = \frac{1}{2},\quad c_2 = \frac{1}{4}$

$a_3 = \frac{1}{4},\quad b_3 = \frac{3}{8},\quad c_3 = \frac{3}{8}$

(3) 証明は省略

(4) $p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

◇ 文系学部

1 (1)　$k > 3 - \sqrt{3}$

(2)　$a = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$，　$b = 5 - 4\sqrt{2}$

2 　理系学部 **2** と同じ.

3 (1)　$\ell : y = -x + \dfrac{1}{2}$，　$b = -4$

(2)　$T_1 = \dfrac{16}{3}$

(3)　$T_2 = 4\pi - \dfrac{16}{3}$

4 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \dfrac{4}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2)　$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4\left|\vec{a}\right|^2 + \dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2$

(3)　$\mathrm{PB} = \sqrt{10}$

5 (1)　$p_1 = \dfrac{211}{243}$

(2)　$p_2 = \dfrac{50}{243}$

(3)　$E = \dfrac{100}{9}$