◀2009 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ．

(1)　すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して，$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する．

(2)　2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば，$A = E$ または $A = -E$ である．ただし E は単位行列とする．

(3)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x = a$ において極値をとる．

(4)　n が 2 以上の自然数ならば，$1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある．

2　座標平面上の 3 点 A(0, 0), B(1, 0), C(x, y) を考える．ただし $y > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとする．そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ．

(2)　△ABC が鋭角三角形であるとする．そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ．

(3)　3 つの角 ∠CAB, ∠ABC, ∠BCA をそれぞれ α, β, γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする．そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ．

(4)　x, y が (3) の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ．

3　曲線 $y = e^x$ 上の点 A(0, 1) における接線を l とし，点 B(0, 2) を通り直線 l に平行な直線を m とする．直線 m と曲線 $y = e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β（ただし $\alpha < \beta$）とする．直線 $x = \alpha$ と直線 l の交点を P′，直線 $x = \beta$ と直線 l の交点を Q′ とする．次の問いに答えよ．

(1)　平行四辺形 PP′Q′Q の面積 S を α, β で表せ．

(2)　直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α, β の多項式で表せ．

(3)　線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ．

(4)　$\alpha + \beta > -1$ であることを示せ．

4　四面体 OABC において，

$$\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{AOC} = \frac{\pi}{2},\quad \angle \mathrm{BOC} = \frac{\pi}{3},\quad \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2,\quad \mathrm{OC} = 1$$

とする．3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$, $\vec{p}\cdot\vec{b}$, $\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ．

(2)　点 P が ∠AOP = ∠BOP = ∠COP を満たすとき，s, t の値を求めよ．

(3)　(2) の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする．BQ : QC および AR : RC を求めよ．

(4)　(2) の条件を満たす点 P について，3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ．

5　2 人のプレーヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う．1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，

B が勝つ確率は $1-p$ であるとする（ただし $0<p<1$）．A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている．1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る．対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する．ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする．ただし n は自然数とする．

(1)　P_4 を求めよ．

(2)　P_{2n-1} を求めよ．

(3)　P_{2n} を求めよ．

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ．

(5)　$S=\lim_{n\to\infty} S_n$ とする．p と S の大小関係を調べよ．

♠ 文系学部

1　関数 $y=x-x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\, t-t^3)$，および点 P における接線 l を考える．ただし $t>0$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$y=x-x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(2)　l と $y=x-x^3$ のグラフの交点を Q とおく．ただし Q は P と異なる点とする．点 Q の x 座標を求めよ．

(3)　三角形 OPQ の面積が 12 になるとき t を求めよ．ただし点 O は原点である．

2　以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ．

(1)　$x<y$ ならば $x^2<y^2$ である．

(2)　$\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$ である．

(3)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる．

(4)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある．

3　座標平面上の定点 P と，関数 $y=f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える．このとき，点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を，点 P と $y=f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする．次の問いに答えよ．

(1)　点 $\mathrm{P}_1\left(0,\, \dfrac{1}{3}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}_2\left(0,\, \dfrac{5}{4}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ．

(3)　点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y=x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

4　四面体 OABC において，

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2},\quad \angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{3},\quad \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2,\quad \mathrm{OC}=1$$

とする．3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 $s,\, t$ を用いて

$$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$, $\vec{p}\cdot\vec{b}$, $\vec{p}\cdot\vec{c}$ を $s,\, t$ を用いて表せ．

(2)　点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき，$s,\, t$ の値を求めよ．

(3)　(2) の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．BQ : QC を求めよ．

(4)　(2) の条件を満たす点 P について，2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ．

5　2 人のプレーヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う．1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする（ただし $0<p<1$）．A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている．1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る．対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する．ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする．ただし n は自然数とする．

(1)　P_2 と P_4 を求めよ．

(2)　P_{2n-1} を求めよ．

(3)　P_{2n} を求めよ．

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　A 論証・II 微分積分・C 行列

2　やや難　II 図形と方程式

3　標準　III 積分法の応用

4　標準　B ベクトル（空間）

5　標準　A 確率・III 数列の極限

♣ 文系学部

1　標準　II 微分積分

2　標準　A 論証・II 対数関数・微分積分

3　標準　II 微分積分

4　標準　B ベクトル（空間）

5　標準　A 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1)　偽．反例は，$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

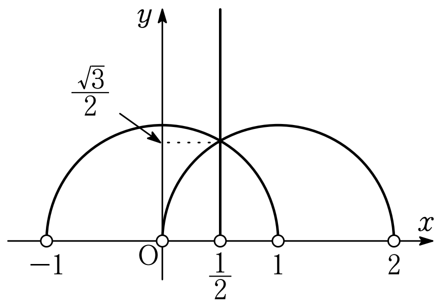
(2)　偽．反例は，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3)　偽．反例は，$f(x)=x^3$

(4)　真．証明は省略

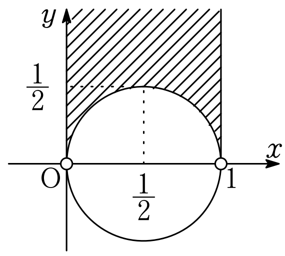
2 (1)　$x^2+y^2=1$，$(x-1)^2+y^2=1$，$x=\dfrac{1}{2}$，$y>0$

グラフは右上図．



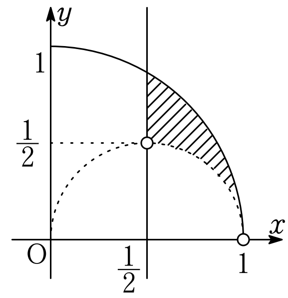
(2)　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$，$x<1$，$y>0$

グラフは右中図．境界線上の点は除く．



(3)　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$，$x^2+y^2\leqq 1$，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$，$y>0$

グラフは右下図．境界は実線は含め，点線と白丸は除く．



(4)　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

3 (1)　$S=\beta-\alpha$

(2)　$T=\dfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)$

(3)　証明は省略

(4)　証明は省略

4 (1)　$\vec{p}\cdot\vec{a}=4(1-s-t)$，　$\vec{p}\cdot\vec{b}=4s+t$，　$\vec{p}\cdot\vec{c}=s+t$

(2)　$s=\dfrac{2}{9}$，　$t=\dfrac{4}{9}$

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$，　$\mathrm{AR}:\mathrm{RC}=4:3$

(4)　$4:3:2$

5 (1)　$P_4=2p^3(1-p)$

(2)　$P_{2n-1}=0$

(3)　$P_{2n}=2^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}$

(4)　$S_n=\dfrac{p^2\{1-(2p(1-p))^n\}}{1-2p(1-p)}$

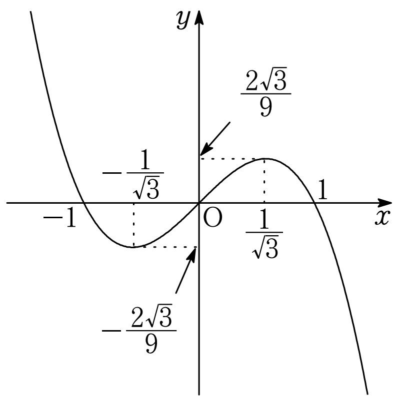
(5)
$$\begin{cases} 0<p<\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & p>S \\ p=\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & p=S \\ p>\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & p<S \end{cases}$$

◇ 文系学部

1 (1)　増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$

グラフは右図のようになる．



(2)　$-2t$

(3)　$t=\sqrt{2}$

2 (1)　偽．反例は，$x=-2,\ y=1$

(2)　偽．反例は，$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}$

(3)　偽．反例は，$f(x)=x^3$

(4)　真．証明は省略

3 (1)　$d_1=\frac{1}{3}$

(2)　$d_2=1$，　$\mathrm{R}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

(3)　$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

4 (1)　$\vec{p}\cdot\vec{a}=4(1-s-t)$，　$\vec{p}\cdot\vec{b}=4s+t$，　$\vec{p}\cdot\vec{c}=s+t$

(2)　$s=\frac{2}{9}$，　$t=\frac{4}{9}$

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$

(4)　$2:1$

5 (1)　$P_2=p^2$，　$P_4=2p^3(1-p)$

(2)　$P_{2n-1}=0$

(3)　$P_{2n}=2^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}$

(4)　$S_n=\dfrac{p^2\{1-(2p(1-p))^n\}}{1-2p(1-p)}$