◀2008 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を零行列，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を単位行列とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　「$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つことを示せ」という問題に対して，次のような解答があった．

「 $A^3=O$ ならば $A=O$　　……①
$A=O$ ならば $A^2=O$　　……②
①, ② によって，$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つ.」

この解答には誤りがある．解答中の ①, ② のそれぞれについて，正しいかどうかを判定し，正しくない場合は正しくないことを示す例（反例）をあげよ．

(2)　$A^3=O$ のとき，A は逆行列をもたないことを示せ．

(3)　「$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つ」ことを証明せよ．ただし，等式

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つことは証明なしで用いてよい．

2　次の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2)　次の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

3　2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石がある．この石は，時刻 $t=0$ では点 A にあり，その後，次の規則 (a), (b) にしたがって動く．

各 $t=0, 1, 2, \cdots$ に対して，

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は c，点 B にある確率は $1-c$ である．

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は $1-2c$ である．

ただし，c は $0<c<\frac{1}{2}$ を満たす定数とする．

いま，n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　p_1, p_2 を求めよ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

(2)　p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ.

(3)　p_n を求めよ.

(4)　$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ.

4　平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は，その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり，なす角が $120°$ である．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　内積 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ を求めよ.

(2)　k, l を整数とするとき，$\left|k\vec{a}+l\vec{b}\right|^2$ は偶数であることを示せ.

(3)　(2) で，k または l が奇数のとき，$\left|k\vec{a}+l\vec{b}\right|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ.

(4)　m, n が整数であり，$m=n=0$ ではないならば，$\left|m\vec{a}+n\vec{b}\right|$ は整数ではないことを示せ.

5　下図のように，点 O から出る 2 本の半直線 l, m があり，l と m のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．l 上に $OP_1=1$ となるように点 P_1 を定め，

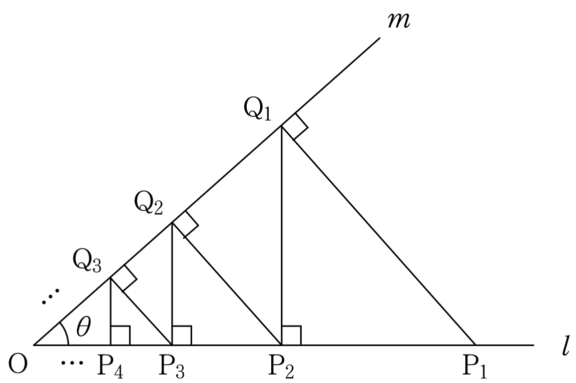
　P_1 から m に垂線 P_1Q_1 を下ろし，

　Q_1 から l に垂線 Q_1P_2 を下ろし，

　P_2 から m に垂線 P_2Q_2 を下ろし，

　Q_2 から l に垂線 Q_2P_3 を下ろす.

同様にくりかえして，点 P_n, Q_n $(n=1, 2, 3, 4, \cdots)$ を定め，三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ の面積を S_n とする.



次の問いに答えよ.

(1)　$\dfrac{P_2Q_2}{P_1Q_1}$ を求めよ.

(2)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ.

(3)　$S=\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ.

(4)　(3) で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ．ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい.

♠ 文系学部

1　3 次関数

$$y=x^3-cx$$

のグラフを考える．ただし，c は定数とする．そして，2 点 P, Q が，次の条件を満たしながら，このグラフ上

全体を動くものとする．

（条件） P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と，傾きの最小値を求めよ．

(2) 線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような，c の値の範囲を求めよ．

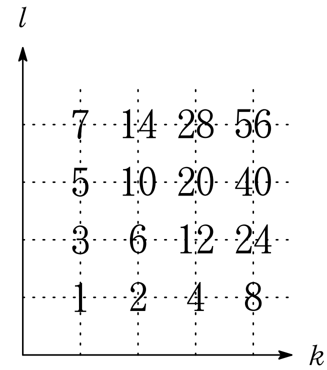
(3) 線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする．点 R におけるグラフの接線の傾きは，線分 PQ の傾きより常に小さいことを示せ．

2 k, l を自然数とし，座標平面上の点 (k, l) に数 $2^{k-1}(2l-1)$ を記入する（下図を参照）．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(2, 25)$ に記入される数を求めよ．

(2) 2008 が記入される点の座標を求めよ．

(3) どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される．その理由を書け．



3 2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石を考える．この石は，時刻 $t=0$ で点 A にあり，その後，次の規則 (a), (b) にしたがって動く．

各 $t=0, 1, 2, \cdots$ に対して，

(a) 時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は $\frac{1}{3}$，点 B にある確率は $\frac{2}{3}$ である．

(b) 時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $\frac{1}{3}$，点 A にある確率は $\frac{2}{3}$ である．

いま，n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

4 $x_1=x_2=1$ とし，$x_n\ (n=3, 4, \cdots)$ は x_{n-2} と x_{n-1} の和を 3 で割ったときの余りであるとして，数列 $\{x_n\}\ (n=1, 2, \cdots)$ を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}$ の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を，解答用紙にある表の中に書け．

【解答用紙の表】

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	1	1										

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

(2)　x_{346} を求めよ．

(3)　$S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ とおくとき，$S_m \geqq 684$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．

5　三角形 OAB において，OA を $t:(1-t)$ に内分する点を M, OB を $t:(1-t)$ に内分する点を N とする．ただし，t は $0<t<1$ の範囲を動く．そして，線分 AN と BM の交点を P とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることを示せ．

(2)　$s = \dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$ とするとき，s を t を用いて表し，s のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　三角形 AMP と三角形 OAB の面積比 $r = \dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$ を (2) の s を用いて表し，r の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　[C] 行列

2　標準　[III] 積分法の応用

3　標準　[A] 確率・[B] 数列

4　やや難　[I] 整数問題・[B] ベクトル

5　標準　[III] 数列の極限

♣ 文系学部

1　標準　[II] 微分積分

2　やや難　[I] 整数問題

3　標準　[A] 確率・[B] 数列

4　標準　[B] 数列

5　標準　[B] ベクトル

略解

◇ 理系学部

1 (1) ① 正しくない．反例は，$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

② 正しい．

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{6}}$

3 (1) $p_1=c$,　$p_2=3c^2-3c+1$

(2) $p_{n+1}=(3c-1)p_n+(1-2c)$

(3) $p_n=\dfrac{c-1}{3c-2}(3c-1)^n+\dfrac{2c-1}{3c-2}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{2c-1}{3c-2}$

4 (1) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

5 (1) $\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}=\cos^2\theta$

(2) $\dfrac{S_2}{S_1}=\cos^4\theta$

(3) $S=\dfrac{\sin 2\theta}{2(3+\cos 2\theta)}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

◇ 文系学部

1 (1) 傾きの最小値：$\frac{1}{4}-c$，点 P の x 座標：$-\frac{1}{2}$

(2) $c \geqq \frac{1}{4}$

(3) 証明は省略

2 (1) 98

(2) (4, 126)

(3) 証明は省略

3 (1) $p_1=\frac{1}{3}$

(2) $p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}$

(3) $p_n=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$

4 (1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0

(2) $x_{346}=1$

(3) $m=607$

5 (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，証明は省略

(2) $s=t+1$,　$1<s<2$

(3) $r=3-\left(s+\frac{2}{s}\right)$,　最大値：$3-2\sqrt{2}$ $(s=\sqrt{2})$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto