◀2002 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ は次の 3 つの条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする．ただし，$a \fallingdotseq 0$, $c \fallingdotseq 0$, $b > d$ で，O は 2 次の零行列である．

(i)　$A^2 = A$,　　(ii)　$B^2 = B$,　　(iii)　$AB = O$

(1)　a, b, c, d の値を求めよ．

(2)　実数 p, q がどちらも 0 でないとき，$(pA+qB)(xA+yB)=2E$ となる実数 x, y を p, q を用いて表せ．ただし，E は 2 次の単位行列である．

2　条件

$$a_1 = -30,\quad 9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$b_n = 3^n a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2)　一般項 a_n を求めよ．

(3)　a_n を最大にする n の値を求めよ．

3　C_1 を曲線 $y=e^x$，C_2 を曲線 $y = x\log x\ (x>0)$ とする．ただし，log は自然対数を表す．また，$x=e$ で定義される直線を ℓ_1, ℓ_1 と C_2 との交点 P を通り x 軸に平行な直線を ℓ_2, ℓ_2 と C_1 との交点 Q を通り y 軸に平行な直線を ℓ_3 とする．

(1)　2 点 P, Q の座標を求めよ．

(2)　$x \geqq 1$ のとき，$e^x > x\log x$ であることを示せ．

(3)　2 直線 ℓ_1, ℓ_3 と 2 曲線 C_1, C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ．

4　xy 平面上を移動する点 P を考える．はじめに，点 P は原点にあるとする．4 枚のカードに上，下，左，右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて，それらを袋に入れておく．

1 枚のカードを取り出し，カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて，
取り出したカードを袋に戻す．

という試行をくり返す．上，下，左，右と書かれたカードは，それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする．

(1)　上，上，下，左，右，右，右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか．

(2)　この試行を 7 回くり返したときに，点 P が座標 $(2, 1)$ にある確率を求めよ．

(3)　この試行を 5 回くり返したときに，点 P が x 軸上にある確率を求めよ．

(4)　この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を (X, Y) とする．$|X-Y|$ の期待値を求めよ．

5　C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，ℓ を直線 $y=ax+2a$ とする．ただし，a は正の定数である．

(1)　C と ℓ とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ．

(2)　C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ．

(3)　(1) における交点を P, Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X, Y)$ とする．a が (1) の範囲を動くとき，X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ．

6 ℓ を複素数平面上の直線 $z=t(1+i)$ (t は実数)，α, β を複素数とする．ただし，点 α は ℓ 上にないとする．

(1) $\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ ならば，ℓ 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ であることを示せ．

(2) ℓ 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ ならば，$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ であることを示せ．

(3) ℓ 上の異なる 2 定点 z_1, z_2 があって $\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}$ と $\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ は同じ複素数になるとする．この複素数を γ とおくとき，ℓ 上のすべての点 z に対し $\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\gamma$ となることを示せ．また γ の値を求めよ．

♠ 文系学部

1 正の定数 a に対し，$\log_a(3x)+\log_{\sqrt{a}}(a-x)=1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある．このとき，a はどのような範囲にあるか．

2 直線 $x+y=1$ 上の点 Q と，放物線 $y=x^2$ 上の原点 O とは異なる点 R に対し，2 つの半直線 OQ, OR の x 軸の正の向きからはかった角をそれぞれ α, β とおく．さらに，線分 QR の中点を P とおく．2 点 Q, R が $\alpha=\beta+45^\circ$，$0^\circ<\beta<45^\circ$ を満たすように動くとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 OQ の傾きを a，直線 OR の傾きを b とするとき，$a=\dfrac{1+b}{1-b}$ となることを示せ．

(2) 点 P の座標を b を用いて表せ．

(3) 点 P の軌跡を求めよ．

3 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a, a^2), \mathrm{B}(b, b^2)$ $(a<b)$ における接線をそれぞれ $\ell_{\mathrm{A}}, \ell_{\mathrm{B}}$ とする．

(1) ℓ_{A} と ℓ_{B} の交点を $\mathrm{P}(p, q)$ とするとき，a, b は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解であることを示せ．

(2) 2 直線 $\ell_{\mathrm{A}}, x=b$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は $\dfrac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ．

(3) 交点 P が放物線 $y=-(x-1)^2$ 上を動くとき，面積 S の最小値を求めよ．

4 1 個のさいころを投げるという試行をくり返す．奇数の目が出たら A の勝ち，偶数の目が出たら B の勝ちとし，どちらかが 4 連勝したら試行を終了する．

(1) この試行が 4 回で終了する確率を求めよ．

(2) この試行が 7 回以下で終了する確率を求めよ．

(3) この試行が 5 回以上続き，かつ，4 回目が A の勝ちである確率を求めよ．

(4) この試行がちょうど 8 回で終了する確率を求めよ．

5 三角形 ABC において，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=c,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=a,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=b,\ \vec{p}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c},\ \vec{q}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a},\ \vec{r}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{b}$$

とおき，$b<c$，$\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{C}$ とする．

(1) $\left|\vec{r}-\vec{q}\right|<\left|\vec{q}-\vec{p}\right|$ であることを示せ．

(2) 定数 s, t に対して，辺 AB 上の点 D，辺 AC 上の点 E があって

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=s\left(\vec{q}-\vec{p}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{CD}}=t\left(\vec{r}-\vec{q}\right)$$

となっている．このとき，s, t を a, b, c の式で表し，さらに $\left|t\left(\vec{r}-\vec{q}\right)\right|<\left|s\left(\vec{q}-\vec{p}\right)\right|$ であることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　C　行列
2. 基本　A　数列
3. 基本　III　積分法の応用
4. やや難　I　確率
5. 標準　C　いろいろな曲線
6. やや難　B　複素数と複素数平面

♣ 文系学部

1. 標準　II　指数関数・対数関数
2. 標準　II　図形と方程式
3. 標準　II　微分積分
4. 標準　I　確率
5. 標準　B　ベクトル（平面）

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a=\dfrac{1}{2},\quad b=\dfrac{1}{2},\quad c=\dfrac{1}{2},\quad d=-\dfrac{1}{2}$

(2) $x=\dfrac{2}{p},\quad y=\dfrac{2}{q}$

2 (1) $b_1=-90,\quad b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{4}{3}$

(2) $a_n=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$

(3) $n=5$

3 (1) $\mathrm{P}(e,\, e),\quad \mathrm{Q}(1,\, e)$

(2) 証明は省略

(3) $e^e-\dfrac{e^2}{4}-e-\dfrac{1}{4}$

4 (1) 420（通り）

(2) $\dfrac{735}{16384}$

(3) $\dfrac{55}{256}$

(4) 1

5 (1) $0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $a^2x_0x+y_0y=1$

(3) $X+2Y^2=0\quad\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}<Y\right)$

6 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略．$\gamma=-i$

◇ 文系学部

1　　$a > \dfrac{3}{2}$

2（1）証明は省略

（2）$\mathrm{P}\left(\dfrac{b+1}{4},\ \dfrac{2b^2+b+1}{4}\right)$,　$0 < b < 1$

（3）放物線：$y = 8x^2 - 3x + \dfrac{1}{2}$　$\left(\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2}\right)$

3（1）証明は省略

（2）証明は省略

（3）最小値：$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

4（1）$\dfrac{1}{8}$

（2）$\dfrac{5}{16}$

（3）$\dfrac{7}{16}$

（4）$\dfrac{7}{128}$

5（1）証明は省略

（2）$s = \dfrac{ac}{a+c}$,　$t = \dfrac{ab}{a+b}$. 証明は省略