◀2000 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　複素数平面上に，3 点 $A(-2i)$, $B(1-i)$, $C(-1+3i)$ と，点 $D(1+i)$ を中心とする半径 1 の円 K がある．点 $P(z)$ は K の周上にあり，点 $Q(w)$ は，三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする（すなわち，AP : AQ = AB : AC で，AP から AQ に反時計まわりに測った角が，AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい)．

(1)　w を z の式で表せ．

(2)　点 P が円 K の周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

2　2 次正方行列 A は，次の条件 (a), (b), (c) を満たしているとする．ただし，E は 2 次の単位行列である．

(a)　A は逆行列 A^{-1} をもち，$A \neq E$ である．

(b)　A^2 は A, A^{-1}, E のいずれかに等しい．

(c)　$A \neq A^{-1}$

次の問いに答えよ．

(1)　条件 (a) を用いて，$A \neq A^2$ を示せ．

(2)　$A^2 = A^{-1}$ を示せ．

(3)　$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$ のとき，p, q の値を定めよ．ただし，p, q は実数とする．

3　1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと，1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある．100 のカードをまず 1 番の箱に入れ，次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ，さらに，97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる．以下，この操作を続けて，k 番の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく．ただし，1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする．したがって，1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある．1 のカードが入っている箱の番号を N とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　N の値を求めよ．また，N 番の箱には何枚のカードが入っているか．

(2)　k 番 $(1 \leqq k \leqq N)$ の箱において，その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ．

(3)　k 番 $(1 \leqq k \leqq N)$ の箱の中のカードに書かれている数の合計を S_k とする．$1 \leqq k \leqq N-1$ のとき，S_k を k の式で表せ．また，$1 \leqq k \leqq N$ のとき，S_k の最大値を求めよ．

4　関数 $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$y = f(x)$ $(x \neq 0)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．

(2)　右側からの極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{3 - f(x)}{1 + 2f(x)}$ を求めよ．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3 - f(x)}{1 + 2f(x)}$ は存在するか．存在するならばその値を求め，存在しないならばその理由をいえ．

5

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta$ を求めよ．

(2)　媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x(\theta) = \int_0^{\theta} (1 + \tan u)\, du \\ y(\theta) = \int_0^{\theta} (1 - \tan u)\, du \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ．

6　1 つのさいころを n 回投げる試行において，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目がちょうど k 回 $(0 \leqq k \leqq n)$ 出る確率を p_k とする．

(1)　$n = 3$ のとき，p_1 を求めよ．

(2)　p_k $(0 \leqq k \leqq n)$ を n と k の式で表せ．また，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ．

(3)　$n = 3m + 2$（m は自然数）とする．$0 \leqq k \leqq n - 1$ のとき，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leqq 1$ となる k の範囲を求めよ．さらに，$0 \leqq k \leqq n$ のとき，p_k が最大となる k を求めよ．

♠ 文系学部

1　関数 $y = (\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3)^2 + 3(\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする．

(1)　$\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3 = x$ とおくとき，y を x の式で表せ．また，x のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　y の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

2　O を原点とする座標空間内に 3 点 A$(1,\ 1,\ 1)$, B$(2,\ -1,\ 2)$, C$(0,\ 1,\ 2)$ がある．点 P が四面体 OABC の辺 BC 上を動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は 3 であることを示せ．

(2)　$\angle$AOP の大きさが最小になるときの点 P の座標を求めよ．

3　a を正の定数とする．曲線 $y = x^2(x - a)$ の点 P$(p,\ p^2(p - a))$ における接線 l が y 軸と交わる点を H$(0,\ h)$ とする．

(1)　h を p の式で表せ．

(2)　$p \geqq 0$ のとき，h を最大にする p の値を求めよ．また，そのときの接線 l の方程式を求めよ．

4

(1)　2 次関数 $y = x^2$ のグラフと点 $(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円が原点以外に共有点をもつような r の値の範囲を求めよ．

(2)　連立不等式 $\begin{cases} y \leqq x^2 \\ x^2 + (y - 1)^2 \leqq 1 \end{cases}$ の表す領域の面積を求めよ．

5　1 から 7 までの番号が 1 つずつ書いてある 7 枚のカードの中から，1 枚ずつ 3 回抜き出す試行を考える．ただし，抜き出したカードはもとに戻さないものとする．この試行において，最後（3 回目）に抜き出したカードの番号が 1 回目および 2 回目に抜き出したカードの番号より大きければ，最後に抜き出したカードの番号が得点として与えられ，それ以外の場合の得点は 0 とする．

(1)　最後に抜き出したカードの番号が 3 である確率 q ，および，得点が 3 である確率 p_3 を求めよ．

(2)　得点が k $(3 \leqq k \leqq 7)$ である確率 p_k を k の式で表せ．また，得点が 0 である確率 p_0 を求めよ．

（3） 得点の期待値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 B 複素数と複素数平面

2 標準 C 行列

3 標準 A 数列

4 標準 III 関数の極限・微分法

5 標準 III 積分法とその応用

6 標準 I 確率

♣ 文系学部

1 標準 II 三角関数

2 標準 B ベクトル（空間）

3 標準 II 微分積分

4 標準 I ２次関数・ II 図形と方程式・微分積分

5 標準 I 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1)　$w=(2+3i)z-6+2i$

(2)　中心が $-7+7i$，半径が $\sqrt{13}$ の円

2 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

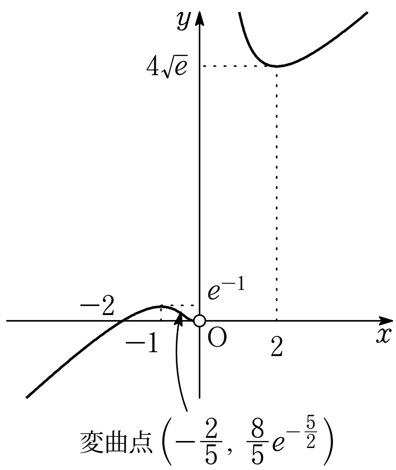
(3)　$p=q=-1$

3 (1)　$N=14$,　9 枚

(2)　$100-\dfrac{1}{2}k(k-1)$

(3)　$S_k=\dfrac{k}{2}(201-k^2)$ $(1\leqq k\leqq 13)$, 最大値 548 $(k=8)$

4 (1)　曲線 $y=f(x)$ の概形は，右図の太実線.



(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}=-\frac{1}{2}$

(3)　存在しない

5 (1)　$\displaystyle\int\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+C$ (C は積分定数)

(2)　$\sqrt{2}\log(2+\sqrt{3})$

6 (1)　$p_1=\dfrac{1}{18}$

(2)　$p_k={}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}$,　$q=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(3)　$k\geqq m$,　$k=m,\ m+1$

◇ 文系学部

1 (1)　$y=x^2-6x+24$　$(2\leqq x\leqq 6)$

(2)　最大値 24 $(\theta=270^\circ)$,　最小値 15 $(\theta=0^\circ,\ 180^\circ)$

2 (1)　証明は省略

(2)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$

3 (1)　$h=-2p^3+ap^2$

(2)　$p=\dfrac{a}{3}$,　$y=-\dfrac{a^2}{3}x+\dfrac{a^3}{27}$

4 (1)　$r>\dfrac{1}{2}$

(2)　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$

5 (1)　$q=\dfrac{1}{7}$,　$p_3=\dfrac{1}{105}$

(2)　$p_k=\dfrac{(k-1)(k-2)}{210}$　$(3\leqq k\leqq 7)$,　$p_0=\dfrac{2}{3}$

(3)　2