◀1995 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ は関係式 $ABA=A$ を満たすものとする．

(1)　行列 A で表される 1 次変換により平面全体は原点を通る直線 l にうつされる．直線 l の方程式を求めよ．

(2)　平面上のベクトル $\vec{v}$ が直線 l に平行であれば，$\vec{v}$ は方程式 $AB\vec{v}=\vec{v}$ を満たすことを示せ．

(3)　ベクトル $\vec{w}$ は零ベクトルではなく，しかも l に平行でないとする．そのとき 2 つのベクトルの大きさの比 $\dfrac{|AB\vec{w}-\vec{w}|}{|A\vec{w}|}$ を最小とするような行列 B を定めよ．

2　放物線 $C：y=6x^2$ 上に 2 つの定点 $\mathrm{A}(a,\ 6a^2)$ と $\mathrm{B}(b,\ 6b^2)$ がある．ここで $a<b$ であり，$L=b-a$ とおく．

(1)　C 上に動点 $\mathrm{P}(p,\ 6p^2)$ をとる．ただし p は $a<p<b$ を満たす．折れ線 APB と放物線 C で囲まれた図形の面積を最小にする p の値を求めよ．

(2)　C 上に 2 つの動点 $\mathrm{P}(p,\ 6p^2)$ と $\mathrm{Q}(q,\ 6q^2)$ をとる．ただし $a<p<q<b$ とする．折れ線 APQB と C が囲む面積を S とし，$s=p-a,\ t=q-p,\ u=b-q$ とおく．さらに

$$M=\left(s-\frac{L}{3}\right)^2+\left(t-\frac{L}{3}\right)^2+\left(u-\frac{L}{3}\right)^2,\quad N=s\left(s-\frac{L}{3}\right)^2+t\left(t-\frac{L}{3}\right)^2+u\left(u-\frac{L}{3}\right)^2$$

とおくとき，S を $L,\ M,\ N$ で表せ．

(3)　(2) で求めた S を最小にする $s,\ t,\ u$ の値はいくらか．

3　空間内に球面 $x^2+y^2+z^2=25$ と平面 $x+2y+2z-9=0$ がある．球面と平面が交わってできる円を C とする．

(1)　C の半径と，C の中心 O' の座標を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ 6)$ と C 上の動点 P の距離の最大値はいくらか．

4　$a_1=a,\ a_{n+1}=a^{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める．ただし a は 1 より大きい定数である．

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して $a_{n+1}\geqq a_n$ が成り立つことを示せ．

(2)　$a\leqq e^{\frac{1}{e}}$ であれば，$a_n\leqq e\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ．ただし e は自然対数の底である．

(3)　数列 $\{a_n\}$ が実数 t に収束したとする．つまり t は $t=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a^{a_n}=a^t$ を満たすとする．そのとき $a\leqq e^{\frac{1}{e}}$ であることを導け．

5　x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (e^{x-t}\cos t-1)\,dt$ を考える．ただし e は自然対数の底で 2 より大きい．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ は $x>0$ で増加することを示せ．

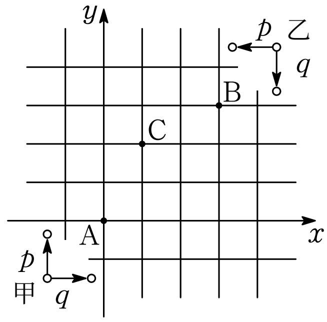
6　図のような格子状道路があり，ある時刻に甲は A 地点 $(0,\ 0)$ に，乙は B 地点 $(3,\ 3)$ にいる．甲が 1 秒毎に上隣の地点（道路の交点）に移動する確率を p，右隣の地点に移動する確率を q，同じ地点にとどまる確率を $r=1-p-q$ とする．また乙は 1 秒毎に確率 p で左隣の地点に，確率 q で下隣の地点に移動し，確

率 r で同じ地点にとどまる.

(1)　$r=0$ のとき，甲と乙が地点 C(1, 2) で出会う確率を求めよ.

(2)　$r=0$ のとき，2 人がどこかで出会う確率を求めよ.

(3)　$r>0$ のとき，2 人が 4 秒後に地点 C で初めて出会う確率はいくらか.



♠ 文系学部

1

(1)　2 次方程式 $x^2+7x+11=0$ の 2 つの解を $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ と表すとき，$\cos^2(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

(2)　$5^n+12^n=13^n$ を満たす正の整数 n は $n=2$ に限ることを証明せよ.

(3)　不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(16x^2)\cdot\log_2\left(\dfrac{x}{32}\right)\geqq 12$ を満たす x の範囲を求めよ.

2

平面上で，原点を通りベクトル $\vec{e}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ に平行な直線を l とし，l に関する対称移動を表す 1 次変換の行列を $A(\alpha)$ とおく.

(1)　行列 $A(\alpha)$ は $A(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}$ で与えられることを示せ.

(2)　原点のまわりの角度 θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ とすると，$A(\alpha)A(\beta)=R(2(\alpha-\beta))$ が成り立つことを示せ.

(3)　n を正の整数，$0\leqq\alpha<2\pi$ とするとき，$2n$ 個の行列の積 $A(2n\alpha)A((2n-1)\alpha)\cdots\cdots A(2\alpha)A(\alpha)$ が単位行列となるような α をすべて求めよ.

3

平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円と，2 点 A$(-2, 0)$, B$(-2, -4)$ がある．点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$ は $0<\theta<\pi$ の範囲で半円周上を動く．点 Q を x 軸に関して点 P と対称な点とし，四角形 PABQ の面積を S とする.

(1)　$t=\cos\theta+\sin\theta$ とおくとき，S を t で表せ.

(2)　S の最大値を求めよ.

4

空間内に 3 つの点 A$(1, -1, 0)$, B$(-1, 1, 4)$, C$(3, 3, 2)$ が与えられている.

(1)　2 点 B, C から等距離にある点のなす平面 α ，および 2 点 A, C から等距離にある点のなす平面 β の方程式を求めよ.

(2)　(1) の 2 つの平面 α と β の交線の方程式を求めよ.

(3)　3 点 A, B, C を通る球のうち，半径が最小となる球の中心の座標と半径を求めよ.

5

各項がすべて正の整数であるような 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がある．数列 $\{a_n\}$ の第 b_n 項を p_n ，数列 $\{b_n\}$ の第 a_n 項を q_n とおく.

(1)　$\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ初項 a, b ，公差 α, β の等差数列であるとする．ただし a, b, α, β は正の整数である．新しい 2 つの数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ は共に等差数列となることを示せ.

(2)　$\{a_n\}$ は初項 a ，公差 d の等差数列，$\{b_n\}$ は初項 b ，公比 r の等比数列である．m を正の整数として $S_m=\sum_{k=1}^{m}p_k,\ T_m=\sum_{k=1}^{m}q_k$ を求めよ．ただし a,d,b は正の整数で，r は 2 以上の整数である．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 代幾 １次変換
2 標準 基解 微分積分
3 標準 代幾 平面の方程式・球面の方程式
4 標準 基解 数列
5 標準 微積 微分法・積分法
6 標準 確統 確率

♣ 文系学部

1 基本 基解 三角関数・数列・指数関数・対数関数
2 標準 代幾 １次変換
3 標準 基解 三角関数
4 標準 代幾 平面の方程式・直線の方程式・球の方程式
5 標準 基解 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $y = x$

(2) 証明は省略

(3) $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2 (1) $p = \frac{a+b}{2}$

(2) $S = N + \frac{2}{3}LM + \frac{L^3}{9}$

(3) $s = t = u = \frac{L}{3}$

3 (1) 半径 4，中心：$\mathrm{O}'(1,\ 2,\ 2)$

(2) $\sqrt{58}$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x) - 1$

(2) 証明は省略

6 (1) $9p^4q^2$

(2) $p^6 + 9p^4q^2 + 9p^2q^4 + q^6$

(3) $135p^4q^2r^2$

◇ 文系学部

1 (1) $\frac{100}{149}$

(2) 証明は省略

(3) $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 16$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $\alpha = \frac{k}{n}\pi \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n-1)$

3 (1) $S = \frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{7}{2}$

(2) $2\sqrt{2} + \frac{9}{2}$

4 (1) $\alpha : 2x + y - z - 1 = 0,\quad \beta : x + 2y + z - 5 = 0$

(2) $x + 1 = -(y-3) = z$

(3) $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 2),\ r = 2\sqrt{2}$

5 (1) 証明は省略

(2) $S_m = (a-d)m + \frac{bd(1-r^m)}{1-r},\ T_m = \frac{br^{a-1}(1-r^{md})}{1-r^d}$