10 （'15　広島大）　　**【難易度】** … 標準

a, b, p は $a>0$, $b>0$, $p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y=e^x,\quad C_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1)　p を a を用いて表せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

【テーマ】：接線と関数の極限

方針

(1) は，C_1, C_2 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式が一致することから p と a の関係式を求めます．
(2), (3) は，(1) の結果を利用して計算します．

解答

(1)　$y=e^x$ において，$y'=e^x$ であるから，点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は，

$$y=e^p(x-p)+e^p \iff y=e^px+(1-p)e^p \cdots\cdots ①$$

一方，C_2 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は，

$$\frac{p}{a^2}x+\frac{e^p}{b^2}y=1$$

$e^p \neq 0$ より，

$$y=-\frac{pb^2}{a^2e^p}x+\frac{b^2}{e^p} \cdots\cdots ②$$

①, ② は一致するので，

$$\begin{cases} e^p=-\dfrac{pb^2}{a^2e^p} \\ (1-p)e^p=\dfrac{b^2}{e^p} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2e^{2p}=-pb^2 & \cdots\cdots ① \\ (1-p)e^{2p}=b^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

したがって，①, ② より b^2 を消去すると，

$$a^2e^{2p}=-p(1-p)e^{2p} \cdots\cdots ③$$

となり，$e^{2p}\neq 0$ であるから，

$$a^2=-p(1-p) \iff p^2-p-a^2=0$$

である。これを解いて，$p=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a^2}}{2}$ を得る。$a>0$, $p<0$ であるから，

$$\boldsymbol{p=\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（2）（1）の結果より，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}(p+a)&=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2}+a\right)\quad(\because\ ②)\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{2a+1-\sqrt{4a^2+1}}{2}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{(2a+1)^2-(4a^2+1)}{2\left(2a+1+\sqrt{4a^2+1}\right)}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{4a}{2\left(2a+1+\sqrt{4a^2+1}\right)}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{4}{2\left(2+\frac{1}{a}+\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}\right)}\\&=\frac{4}{2(2+2)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

（3）（1）より，

$$\begin{aligned}\frac{b^2e^{2a}}{a}&=(1-p)e^{2p}\cdot\frac{e^{2a}}{a}\quad(\because\ ②)\\&=-p(1-p)e^{2p}\cdot\frac{e^{2a}}{-ap}\\&=a^2e^{2p}\cdot\frac{e^{2a}}{-ap}\quad(\because\ ③)\\&=-\frac{ae^{2(p+a)}}{p}\\&=-\frac{2a}{1-\sqrt{4a^2+1}}e^{2(p+a)}\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}&=\lim_{a\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{4a^2+1}-1}e^{2(p+a)}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{a}}e^{2(p+a)}\\&=\frac{2}{\sqrt{4}}e^{2\left(\frac{1}{2}\right)}\quad(\because\ (2))\\&=\boldsymbol{e}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

（1）は共通接線に関する問題で，与えられた点における接線が一致することから傾きと y 切片を比較すれば求めることができます．(2), (3) は，(1) で行った計算結果や計算途中の式（①～③）を利用することで極限の計算を行うことができます．(2) は a のみの式に変形すること，(3) は (2) の結果を使うことができるため，$p+a$ と a の式に変形することがポイントです．つまり，b を消去するための式変形を考えればよいということです．