5 （'06　福井大） 【難易度】 … 標準

正四面体 OABC の 3 頂点 O, A, B の座標が O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 3, −3) であるとき，以下の各問いに答えよ．

（1） 頂点 C の座標を求めよ．ただし，C の x 座標は正とする．

（2） 2 点 P, Q がそれぞれ線分 OC，線分 AB 上を動くとき，PQ の最小値を求めよ．

【テーマ】：空間ベクトルの演算

方針

(1) は，正四面体という条件から C の座標を決定します．ポイントは，4 つの辺の長さがすべて等しいということです．(2) では，ベクトル方程式を用いて考えます．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を媒介変数を用いて表すと，2 変数関数の最小値問題に帰着します．

♣ ♠

解答

（1） $\mathrm{C}(p, q, r)$ $(p > 0)$ とおくと，$\mathrm{OC} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} = \mathrm{OA} = \sqrt{18}$ より，

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 18 & \cdots\cdots \text{①} \\ (p-3)^2 + (q-3)^2 + r^2 = 18 & \cdots\cdots \text{②} \\ p^2 + (q-3)^2 + (r+3)^2 = 18 & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

② − ① より，

$$(p-3)^2 + (q-3)^2 - p^2 - q^2 = 0$$

$$-6p + 9 - 6q + 9 = 0 \text{ すなわち } p + q = 3 \cdots\cdots \text{④}$$

③ − ② より，

$$p^2 - (p-3)^2 + (r+3)^2 - r^2 = 0$$

$$6p - 9 + 6r + 9 = 0 \text{ すなわち } p + r = 0 \cdots\cdots \text{⑤}$$

④, ⑤ より，

$$q = 3 - p,\ r = -p$$

これを ③ へ代入して，

$$\begin{aligned} p^2 + p^2 + (-p+3)^2 = 18 &\iff 3p^2 - 6p - 9 = 0 \\ &\iff p^2 - 2p - 3 = 0 \\ &\iff (p-3)(p+1) = 0 \end{aligned}$$

$p > 0$ より，$p = 3$ である．よって，④, ⑤ より，

$$\boldsymbol{(p, q, r) = (3, 0, -3)} \cdots\cdots\textbf{（答）}$$

（2） $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

ここで，実数 s, t を用いて，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (0 < s < 1) \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0 < t < 1) \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (3,\ 3,\ 0) + s(-3,\ 0,\ -3) - t(3,\ 0,\ -3) \\ &= (3 - 3s - 3t,\ 3,\ -3s + 3t) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| &= \sqrt{(3-3s-3t)^2 + 3^2 + (-3s+3t)^2} \\ &= 3\sqrt{(1-s-t)^2 + 1 + (-s+t)^2} \\ &= 3\sqrt{2s^2 + 2t^2 - 2s - 2t + 2} \\ &= 3\sqrt{2(s^2 - s) + 2t^2 - 2t + 2} \\ &= 3\sqrt{2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2t^2 - 2t + 2} \\ &= 3\sqrt{2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 2(t^2 - t) + \frac{3}{2}} \\ &= 3\sqrt{2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

ゆえに，$s = t = \dfrac{1}{2}$ のとき，PQ の最小値は **3**……(**答**)

◇ ♡

解説

(1) は，正四面体の 4 頂点のうち 3 頂点の座標がわかっているので，1 辺の長さが求められます．これを用いて，C の座標を求めますが，C の座標が与えられていないので，自分で C$(p,\ q,\ r)$ とおかなければいけません．このように自分で文字を設定した場合，未知数の個数だけ式が必要になることを覚えておきましょう！本問では，未知数は $p,\ q,\ r$ の 3 個なので，式を 3 つ作って連立方程式を解けばよいことになります．

(2) は，空間内にある線分上の動点を考えるのでベクトル方程式が有効です．問題文からベクトルを想像することができなかった人もいるかもしれませんが，空間図形で座標が与えられているので，ベクトルがとても役立ちます．ベクトル方程式なので，媒介変数が必要になります．上の解答では $s,\ t$ になります．$s,\ t$ を変化させると PQ の長さが変化するので，$s,\ t$ を変数とする 2 変数関数と考えましょう！あとは，2 変数関数の最小値の求め方を知っているかどうかがポイントとなります．まずは，1 文字を固定（1 文字を定数と考えるということ）して，s の 2 次関数と考えて平方完成します．そうすると最小値が t の式になりますから，今度は固定した文字 t に関する 2 次関数と考えて平方完成して，最小値を求めます．このようにして，PQ の長さの最小値を求めていきます．