3 （'15　北海道大） **【難易度】** … 標準

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す．

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す．

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる．

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える．

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする．

(1) $X_1=3$ となる確率を求めよ．

(2) $X_2=3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_2=3$ であったとき，$X_1=3$ である条件つき確率を求めよ．

【テーマ】：条件つき確率

方針

(2) では，1 回目に引いた 2 個の玉によって，2 回目以降が変化するため，場合分けが必要になります．

解答

各回の試行において，(i) で取り出した玉の色によって，袋の中の赤玉と白玉の個数は，次のように変化する．

(ア) (i) で同色の玉を取り出した場合

白玉が 1 個増え，赤玉の個数は変わらない．

(イ) (i) で色違いの玉を取り出した場合

赤玉が 1 個増え，白玉の個数は変わらない．

(1) $X_1=3$ となるのは，1 回目に色違いの玉を取り出すときであるから，求める確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $X_2=3$ となるのは，次の場合である．

[1] 1 回目に色違いの玉を取り出し，2 回目に同色の玉を取り出すとき，

(1) の結果から，

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{10}=\frac{4}{15}$$

[2] 1 回目に同色の玉を取り出し，2 回目に色違いの玉を取り出すとき，

(1) の結果から，

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{1}{5}$$

[1], [2] より，求める確率は，

$$\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{7}{15}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　$X_2 = 3$ となる事象を A，$X_1 = 3$ となる事象を B とすると，(2) から，

$$P(A) = \frac{7}{15}$$

である．$A \cap B$ は (2) の [1] の場合であるから，

$$P(A \cap B) = \frac{4}{15}$$

である．ゆえに，求める確率は，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \boldsymbol{\frac{4}{7}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(3) において，条件つき確率を求めるわけですが，まず『$X_2 = 3$ であったとき,』と問題文に書かれていることから，これはすでに起こったことを表しています．このように，条件つき確率を考える際には，すでに起こった事実が何なのかを見極めなければいけません．その事実こそが確率を求める際の『**分母**』にくるわけです．あとは，その条件下で $X_1 = 3$ が起こるわけなので，$X_2 = 3$ かつ $X_1 = 3$ となる確率が『**分子**』にきます．公式という認識で式として覚えている人も多いかもしれませんが，条件つき確率の本質をしっかりと理解しておけば，状況が変わったとしても対応できるでしょう．