1 （′01　帯広畜産大）　【難易度】 … 標準

$\angle$BAC $= 45^\circ$ である $\triangle$ABC において，AP $= 1$, $\angle$BAP $= 15^\circ$ を満たす辺 BC 上の点 P が存在するとき，次の問いに答えなさい．

(1)　$\sin\angle$BAP の値を求めなさい．

(2)　$\angle$APC $= \theta$ とするとき，θ のとり得る値の範囲を求めなさい．

(3)　$\triangle$ABC の面積を S とするとき，$\dfrac{1}{S}$ を θ を用いて表しなさい．

(4)　S を最小にする θ の値を求めなさい．また，そのときの S の値を求めなさい．

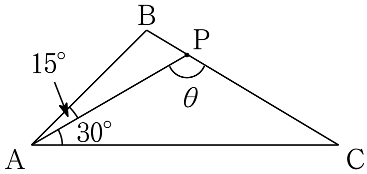
【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

(1) は加法定理で求められます．(2) は，$\angle$ACP と $\angle$ABC を θ を用いて表すと範囲が求められます．(3) は，正弦定理を利用します．(4) は，S が最小となるときは，$\dfrac{1}{S}$ が最大となるときであることを利用します．

♣　♠

解答



(1)　$\angle$BAP $= 15^\circ$ であるから，加法定理より，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAP} &= \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(2)　$\triangle$APC, $\triangle$APB の内角の和について，

$$\angle\mathrm{APC} + \angle\mathrm{PAC} < 180^\circ,\quad \angle\mathrm{APB} + \angle\mathrm{PAB} < 180^\circ$$

であるから，

$$\theta + 30^\circ < 180^\circ,\quad (180^\circ - \theta) + 15^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{15^\circ < \theta < 150^\circ}\text{……(答)}$$

(3)　$\angle$ABP $= \theta - 15^\circ$，$\angle$ACP $= 150^\circ - \theta$ であるから，$\triangle$ABP において正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin(\theta - 15^\circ)} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(180^\circ - \theta)} \iff \mathrm{AB} = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta - 15^\circ)}$$

$\triangle$APC において正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin(150^\circ - \theta)} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta} \iff \mathrm{AC} = \frac{\sin\theta}{\sin(150^\circ - \theta)}$$

よって，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(\theta - 15^\circ)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(150^\circ - \theta)}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{S} = \frac{2\sqrt{2}\sin(\theta - 15^\circ)\sin(150^\circ - \theta)}{\sin^2\theta}}\text{……(答)}$$

(4) S が最小となるときは，$\dfrac{1}{S}$ が最大となるときである．(3) より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{S} &= 2\sqrt{2}\cdot\frac{(\sin\theta\cos 15^\circ-\cos\theta\sin 15^\circ)(\sin 150^\circ\cos\theta-\cos 150^\circ\sin\theta)}{\sin^2\theta}\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{1}{\tan\theta}=t$ とおくと，

$$\frac{1}{S}=2\sqrt{2}(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ t)\left(\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ t)(t+\sqrt{3})$$

である．(1) より，$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であり，同様にすると，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を得るので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{S} &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}t\right)(t+\sqrt{3})\\ &= \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\left(t-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)(t+\sqrt{3})\\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2}\{t-(2+\sqrt{3})\}(t+\sqrt{3})\\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2}\{(t-1)^2-2\sqrt{3}-4\}\end{aligned}$$

$t=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ であるから，(2) より，

$$\frac{\cos 150^\circ}{\sin 150^\circ}<t<\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}\ \text{すなわち}\ -\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}$$

である．よって，$t=1$ のとき，$\dfrac{1}{S}$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(4+2\sqrt{3})$ をとるので，S の最小値は，

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{3-1}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\quad \boldsymbol{(\theta=45^\circ)}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(2) は三角形が成立するための角の条件を考えます．内角の和が 180° より小さくなる必要があります．(3), (4) は計算も複雑になり比較的難易度が上がります．正弦定理や加法定理を用いて計算し，さらに (1) の計算結果も利用します．(4) は，S の最小値を求めるのですが，(3) で $\dfrac{1}{S}$ を求めているのでこれをヒントにします．S が最小となるのは，$\dfrac{1}{S}$ が最大となるときと考えます．ただ，これだけではダメで，$\dfrac{1}{S}$ の式には，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混在しています．これをどのように処理するかがポイントとなります．分母にある $\sin^2\theta$ を使うと $\dfrac{1}{\tan\theta}$ の式になります．そこで $\dfrac{1}{\tan\theta}=t$ として，t の 2 次式にして最大値を考えようという方針で計算をしています．ただし，t のとり得る値の範囲を求めることを忘れないようにしましょう．