36 （'15　埼玉大） 【難易度】 … 標準

n は 2 以上の自然数とし，

$$f(\theta)=\frac{\cos^{n-1}\theta\sin^{n-1}\theta}{\cos^{2n}\theta+\sin^{2n}\theta}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1)　$t=\tan^n\theta$ と変数変換することにより，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\theta)\,d\theta$ を求めよ．

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，指示されているように置換積分を行いますが，その後もう一度置換積分を行わなければいけません．(2) は，$x=\tan\theta$ とおいて，x の関数に変換すると微分し易くなります．ただし，x のとり得る値の範囲に注意しましょう．

♣ ♠

解答

(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$\cos^{2n}\theta\neq 0$ であるから，

$$f(\theta)=\frac{\dfrac{\cos^{n-1}\theta\sin^{n-1}\theta}{\cos^{2n}\theta}}{1+\dfrac{\sin^{2n}\theta}{\cos^{2n}\theta}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\tan^{n-1}\theta}{1+\tan^{2n}\theta}\ \cdots\cdots\ ①$$

よって，$t=\tan^n\theta$ とおくとき，$dt=n\tan^{n-1}\theta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

t と θ の対応関係は，右表のようになる．

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\to$	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\theta)\,d\theta=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{n}\,dt=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

さらに，$t=\tan u$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2 u}\,du$ であり，t と u の対応関係は，右表のようになる．したがって，

t	0	$\to$	1
u	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}du=\boldsymbol{\frac{\pi}{4n}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　① より，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$\tan\theta=x$ とおくと，$x\geqq 0$ であり，

$$f(\theta)=\frac{(1+\tan^2\theta)\tan^{n-1}\theta}{1+\tan^{2n}\theta}=\frac{(1+x^2)x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

$f(\theta)=g(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\{2x\cdot x^{n-1}+(1+x^2)(n-1)x^{n-2}\}(1+x^{2n})-(1+x^2)x^{n-1}\cdot 2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2}\\&=\frac{x^{n-2}[\{(n-1)+(n+1)x^2\}(1+x^{2n})-2n(1+x^2)x^{2n}]}{(1+x^{2n})^2}\\&=\frac{x^{n-2}\{(1-n)x^{2n+2}-(n+1)x^{2n}+(n+1)x^2+(n-1)\}}{(1+x^{2n})^2}\\&=\frac{x^{n-2}\{(n+1)x^2(1-x^{2n-2})+(n-1)(1-x^{2n+2})\}}{(1+x^{2n})^2}\end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より，$n+1>0,\ n-1>0$ であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ で，$g'(x) \geqq 0$ であり，$x>1$ で $g'(x)<0$ である．

また，

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{n+1}}+\dfrac{1}{x^{n-1}}}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=0$$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)

$x=1$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であり，$x=0$ のとき，$\theta=0$ である．

また，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ である。ゆえに，求める最大値・最小値は，

$$\begin{cases}\textbf{最大値：1}\quad \left(\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}\right)\\ \textbf{最小値：0}\quad \left(\boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}}\right)\end{cases}\quad\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，ヒントが与えられていますが，これだけでは解けません．その後，$\dfrac{1}{1+t^2}$ の積分が出てきます．しかし，これは基本演習ができている人であれば容易に計算できます．

(2) は，(1) とは独立設問となっていますが，(1) の置換をヒントにします．① をみて，$f(\theta)$ が $\tan\theta$ だけで表せることに気がつけば，$x=\tan\theta$ と置換することで x の式を作ることができるので，後は微分すれば最大値と最小値を求められます．計算が少々面倒なので，計算間違いには注意しましょう．解答では，$\tan\theta$ が $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で定義できないため，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ と $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で分けて考えています。

ちなみに，時々 $f(\theta)=\dfrac{(1+x^2)x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ より，

$$f'(\theta)=\cdots\cdots=\frac{x^{n-2}\{(n+1)x^2(1-x^{2n-2})+(n-1)(1-x^{2n+2})\}}{(1+x^{2n})^2}$$

のように書く人がいますが，これは間違いです．『′』は，$f(\theta)$ が θ の関数なので，θ で微分しましたという記号です．正しくは，$\dfrac{d}{d\theta}f(\theta)$ と書くところを $f'(\theta)$ としています．しかし，実際は x で微分するので，$f(\theta)=g(x)$ とおいて，$g'(x)=\cdots\cdots$ とするべきでしょう．