35 ('15 愛媛大) 【難易度】… 標準

a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases},\qquad b_1=a,\quad b_{n+1}=\begin{cases} 2b_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ b_n+1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める．

(1) a_2, a_3, a_4 および b_2, b_3, b_4 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_{2n}$ で定める．$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{S_n\}, \{T_n\}$ および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}a_k,\quad T_n=\sum_{k=1}^{2n}b_k,\quad U_n=S_n-T_n$$

で定める．

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $a=1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

(1) は，与えられた漸化式から順次 $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4$ を求めます．(1) で，各項をどのようにして求めるかを理解しましょう．(2) は，$\{c_n\}$ の漸化式を導きます．(3) は，(2) と同様にして，b_{2n} を求めます．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，$a_{n+1}=a_n+1$ と $a_{n+1}=2a_n$ を交互に用いて，

$$\boldsymbol{a_2=a+1,\ a_3=2a+2,\ a_4=2a+3}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

また，$b_{n+1}=2b_n$ と $b_{n+1}=b_n+1$ を交互に用いて，

$$\boldsymbol{b_2=2a,\ b_3=2a+1,\ b_4=4a+2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $c_{n+1}=a_{2(n+1)}=a_{2n+2}$ であるから，

$$\begin{aligned} c_{n+1}&=a_{2n+2} \\ &=a_{2n+1}+1 \\ &=2a_{2n}+1 \\ &=2c_n+1 \end{aligned}$$

である．$c_1=a_2=a+1$ であり，

$$c_{n+1}=2c_n+1 \iff c_{n+1}+1=2(c_n+1)$$

であるから，数列 $\{c_n+1\}$ は，初項 $c_1+1=a+2$，公比 2 の 等比数列である．よって，

$$c_n+1=(a+2)\cdot 2^{n-1} \iff \boldsymbol{c_n=(a+2)\cdot 2^{n-1}-1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) (i) l を自然数とするとき，$a_{2l-1}=a_{2l}-1$ であるから，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{l=1}^{n}(a_{2l}-1+a_{2l}) \\ &= \sum_{l=1}^{n}(2a_{2l}-1) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\{(a+2)\cdot 2^l-3\} \\ &= (a+2)\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}-3n \\ &= \boldsymbol{(a+2)(2^{n+1}-2)-3n}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(ii) (2) と同様に考えて，$d_n=b_{2n}$ とおくと，

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= b_{2n+2}=2b_{2n+1} \\ &= 2(b_{2n}+1)=2d_n+2 \end{aligned}$$

である．$a=1$ より，$d_1=b_2=2$ であり，

$$d_{n+1}=2d_n+2 \iff d_{n+1}+2=2(d_n+2)$$

であるから，数列 $\{d_n+2\}$ は，初項 $d_1+2=4$，公比 2 の 等比数列である．よって，

$$d_n+2=4\cdot 2^{n-1} \iff d_n=2^{n+1}-2$$

したがって，

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{l=1}^{n}(b_{2l-1}+b_{2l})=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{2}b_{2l}+b_{2l}\right) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n}d_l=\frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n}(2^{l+1}-2) \\ &= \frac{3}{2}\left\{\frac{4(2^n-1)}{2-1}-2n\right\}=6(2^n-1)-3n \end{aligned}$$

$a=1$ のとき，$S_n=3\cdot 2^{n+1}-3n-6$ であるから，

$$U_n=S_n-T_n=3\cdot 2^{n+1}-3n-6-\{6(2^n-1)-3n\}=\mathbf{0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

n の偶奇によって，漸化式が変わるため状況を把握する設問として (1) があります．もしも，このような設問がない場合は，自力で $n=1, 2, 3, \cdots$ を調べて状況を把握しなければいけません．(2) は，$c_n=a_{2n}$ と置くように指示されているので，数列 $\{c_n\}$ に関する漸化式を考えればよいことがわかります．これは，数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項だけを新しい数列 $\{c_n\}$ にしましょうということを表しています．(3) は和の計算をしますが，(2) をヒントにしながら計算をしなければいけません．特に，a_{2l-1} を a_{2l} で表すところでは，$2l-1$ が奇数なので，$a_{2l}=a_{2l-1}+1$ すなわち $a_{2l-1}=a_{2l}-1$ となります．b_{2l-1} も同様に，$b_{2l}=2b_{2l-1}$ より，$b_{2l-1}=\dfrac{1}{2}b_{2l}$ となります．