32 （'07　東北大） **【難易度】** … 標準

自然数 n に対し，方程式

$$\frac{1}{x^n}-\log x-\frac{1}{e}=0$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり，e はその底とする．

（1） 上の方程式は $x \geqq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ．

（2） (1) の解を x_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=1$ を示せ．

【テーマ】：実数解の極限値

方針

(1) は，単調性と中間値の定理を用います．(2) は，(1) の結果から x_n を n を含んだ式で評価します．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$f(x)=\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x)&=-n\cdot x^{-n-1}-\frac{1}{x}\\ &=\frac{-n-x^n}{x^{n+1}}<0 \quad (\because\ x \geqq 1,\ n\text{ は自然数}) \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ のグラフは単調減少である．

$$f(1)=1-\frac{1}{e}>0\,,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

であり，$f(x)$ は $x \geqq 1$ で連続な関数であるから，中間値の定理より $f(x)=0$ を満たす実数 x がただ 1 つ存在する．以上より，示された． **(証明終)**

（2） **【証明】**

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{n}<0$$

となるので，(1) から，

$$1<x_n<e^{\frac{1}{n}}$$

である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$ より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

である．ゆえに，示された． **(証明終)**

♢ ♡

解説

与えられた方程式を直接解くことはできないので，左辺を $f(x)$ とおいて，実数解の個数をグラフを用いて考えます．ただ 1 つの実数解をもつことを示したいので，単調性と中間値の定理を利用します．(1) の解は具体的に求められないため，不等式を用いて解のとり得る値の範囲を求めます．後は，はさみうちの原理を利用すれば極限値が求められます．