30 ('15 北海道大) 【難易度】 … 標準

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 E とその焦点 $\mathrm{F}(1,\,0)$ がある．E 上に点 P をとり，直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする．F を通り直線 PF と垂直な直線と E との 2 つの交点を R, S とする．

(1) r を正の実数，θ を実数とする．点 $(r\cos\theta+1,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるとき，r を θ で表せ．

(2) P が E 上を動くとき，$\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：2次曲線

方針

(1) は，点 $(r\cos\theta+1,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるときを考えるので，代入して r と θ の関係式を求めます．(2) では，点 F を極とし，x 軸を始線とする極座標を考えます．

♣ ♠

解答

(1) 点 $(r\cos\theta+1,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるとき，

$$\frac{(r\cos\theta+1)^2}{2}+(r\sin\theta)^2=1$$

を満たす．ゆえに，

$$r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta+1+2r^2\sin^2\theta=2$$

$$r^2(1+\sin^2\theta)+2r\cos\theta-1=0$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+(1+\sin^2\theta)}}{1+\sin^2\theta}$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{2}}{1+\sin^2\theta}$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\cos\theta)(\sqrt{2}+\cos\theta)}$$

$r>0$ であるから，

$$r=\frac{-\cos\theta+\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\cos\theta)(\sqrt{2}+\cos\theta)}$$

$$\boldsymbol{r=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}}\text{……}\textbf{(答)}$$

(2) 楕円 E の焦点 $\mathrm{F}(1,\,0)$ を極，x 軸を始線とする極座標 $(r,\,\theta)$ ($r\geqq 0,\,\theta$ は実数) を考える．この極座標と座標平面上の点 $(x,\,y)$ は，

$$\begin{cases} x=r\cos\theta+1 \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

のように対応するので，楕円 E を極方程式で表すと，(1) の結果から $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$ である．ここで，点 P の偏角を θ とし，点 P の極座標を $\mathrm{P}(r_{\mathrm{P}},\,\theta)$ とするとき，点 Q, R, F の極座標はそれぞれ

$$\mathrm{Q}(r_{\mathrm{Q}},\,\theta+\pi),\quad \mathrm{R}\left(r_{\mathrm{R}},\,\theta+\frac{\pi}{2}\right),\quad \mathrm{S}\left(r_{\mathrm{S}},\,\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$$

と表せる．ただし，$r_{\mathrm{P}}>0,\ r_{\mathrm{Q}}>0,\ r_{\mathrm{R}}>0,\ r_{\mathrm{S}}>0$ とする．よって，

$$r_{\mathrm{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$$

$$r_{\mathrm{Q}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\cos(\theta+\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}$$

$$r_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$$

$$r_{\mathrm{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}+\frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(2-\sin^2\theta+2-\cos^2\theta)}{(2-\cos^2\theta)(2-\sin^2\theta)} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(4-1)}{(2-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)} \\
&= \frac{6\sqrt{2}}{(2-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}
\end{aligned}$$

ここで, $\cos^2\theta = t$ とおくと, $0 \leqq t \leqq 1$ であり, $f(\theta) = \mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$ とおくと,

$$f(\theta) = \frac{6\sqrt{2}}{(2-t)(1+t)} = \frac{6\sqrt{2}}{-t^2+t+2} = \frac{6\sqrt{2}}{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

よって, $0 \leqq t \leqq 1$ より, $t = \dfrac{1}{2}$ のとき $f(\theta)$ の分母は最大値をとるので, $f(\theta)$ は最小値

$$\frac{6\sqrt{2}}{\frac{9}{4}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

をとる.

◇ ♡

解説

(1) は, 点 $(r\cos\theta+1,\ r\sin\theta)$ が E 上にあるので, 代入して r と θ の関係式を導きます. 因数分解が思いつけば答えがすぐ求められますが, 思いつかなければ解の公式を用いて求めることもできます. なお, $r>0$ であることに注意をしましょう.

(2) は, (1) の問題文にある $(r\cos\theta+1,\ r\sin\theta)$ が大きなヒントとなります. E 上の点をこのようにおいて, (1) で極方程式を求めたので, 極座標で考えるとスッキリと求められます. 点 P の偏角を θ とすれば, 残り 3 点の偏角もわかります. また, $\mathrm{PF}=r_{\mathrm{P}}$, $\mathrm{QF}=r_{\mathrm{Q}}$, $\mathrm{RF}=r_{\mathrm{R}}$, $\mathrm{SF}=r_{\mathrm{S}}$ であることから, (1) で求めた極方程式が利用できます. あとは, 三角関数の最小値問題に帰着します.