28　('14　東京大)　**【難易度】**… 標準

u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1:\quad y=-x^2+1$$
$$C_2:\quad y=(x-u)^2+u$$

を考える．C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 $a,\,b$ により，$a \leqq u \leqq b$ と表される．

(1)　$a,\,b$ の値を求めよ．

(2)　u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\,y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\,y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$ を u の式で表せ．

(3)　(2) で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ を求めよ．

【テーマ】：2 次方程式と定積分

方針

(1) は，判別式で求められ，(2) は対称式の計算を行います．(3) は置換積分を行いますが，ポイントは根号内を式変形して，$\sqrt{a^2-x^2}$ の形であることを見抜くことです．

♣　♠

解答

(1)　2 曲線が共有点をもつとき，2 次方程式

$$-x^2+1=(x-u)^2+u \iff 2x^2-2ux+u^2+u-1=0 \cdots\cdots ①$$

が実数解をもつので，判別式を D とすると，$D \geqq 0$ である．よって，

$$D/4=(-u)^2-2(u^2+u-1) \geqq 0 \iff u^2+2u-2 \leqq 0 \cdots\cdots ②$$

$u^2+2u-2=0$ の解は，$u=-1\pm\sqrt{3}$ であるから，② を満たす u の値の範囲は，

$$-1-\sqrt{3} \leqq u \leqq -1+\sqrt{3}$$

となる．ゆえに，$\boldsymbol{a=-1-\sqrt{3}}$**，**$\boldsymbol{b=-1+\sqrt{3}}$**……(答)**

(2)　2 点 $\mathrm{P}_1,\,\mathrm{P}_2$ はともに C_1 上の点であるから，$y_1=-{x_1}^2+1$，$y_2=-{x_2}^2+1$ である．よって，

$$\begin{aligned}2\left|x_1y_2-x_2y_1\right| &= 2\left|x_1(-{x_2}^2+1)-x_2(-{x_1}^2+1)\right|\\ &= 2\left|-x_1{x_2}^2+x_1+x_2{x_1}^2-x_2\right|\\ &= 2\left|(x_1x_2+1)(x_1-x_2)\right|\end{aligned}$$

一方，$x_1,\,x_2$ は ① の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$x_1+x_2=u,\quad x_1x_2=\frac{u^2+u-1}{2}$$

である．よって，

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=u^2-4\cdot\frac{u^2+u-1}{2}=-u^2-2u+2$$

であり，これは ② より $a \leqq u \leqq b$ の範囲で常に 0 以上の値をとるので，

$$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{-u^2-2u+2}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}2\left|(x_1x_2+1)(x_1-x_2)\right| &= 2\left|\frac{u^2+u-1}{2}+1\right|\sqrt{-u^2-2u+2}\\ &= 2\left|\frac{u^2+u+1}{2}\right|\sqrt{-u^2-2u+2}\\ &= \boldsymbol{(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\quad (\because\ \ u^2+u+1>0)\end{aligned}$$

(3) (2) より，$f(u)=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$ であるから，

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}}(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}\,du\\ &= \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}}(u^2+u+1)\sqrt{3-(u+1)^2}\,du\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin\theta=u+1$ とおくと，$\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta=du$ であり，
u と t の対応関係は，右のようになる．

u	$-1-\sqrt{3}$	$\to$	$-1+\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

ゆえに，求める定積分の値は，

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{(\sqrt{3}\sin\theta-1)^2+\sqrt{3}\sin\theta\}\sqrt{3(1-\sin^2\theta)}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1\right)\cdot 3\cdot\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(9\sin^2\theta\cos^2\theta-3\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+3\cos^2\theta\right)d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{4}\sin^2 2\theta-3\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}-3\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\ &= \left[\,\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)-3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)+3\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+3\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{21}{8}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は，2 次方程式の実数解の個数という基本的な問題なので判別式で処理ができます．(2) は，x_1, x_2 についての対称式であることに気がつけば基本的な問題です．ここまでは，完答できるようにしたい問題です．(3) は，定積分の問題ですが，どのように置換すれば計算ができるようになるかがポイントです．本問の場合，根号内を平方完成すれば $\sqrt{a^2-x^2}$ の形にできるので，$x=a\sin\theta$ という置換ができることがわかります．あとは，定積分を計算するだけなので，計算力があれば完答が目指せるでしょう．ちなみに，$\sin\theta\cos^2\theta$ は奇関数なので，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=0$$

を用いれば，記述量を減らすことができます．本解答では，この積分計算を見せるためあえて残しています．