23 （′14　神戸大） 【難易度】 … 標準

0 と書いたカードが 1 枚，1 と書いたカードが 3 枚，2 と書いたカードが 3 枚，計 7 枚のカードが袋に入っている．このとき，A 君と B 君が次のルールにしたがい，袋から 1 枚ずつカードを引くゲームをする．ただし，引いたカードは袋には戻さないとし，袋の中のカードがなくなればゲームは終了する．

(ア) 最初に A 君がカードを引く．

(イ) 0 以外のカードを引いた場合は，次のカードを相手が引く．

(ウ) 0 のカードを引いた場合は，次のカードを自分が引く．

A 君と B 君のそれぞれの得点は，0 のカードを引かなかった場合は，引いたカードに書いてある数字の合計とする．0 のカードを引いた場合は，0 のカードを引くまでに引いたカードに書いてある数字の合計とする．A 君の得点を X, B 君の得点を Y とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $X=1$ となる確率を求めよ．

(2) $X=2$ となる確率を求めよ．

(3) $Y=5$ となる確率を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

どのタイミングで 0 のカードを引くかがポイントです．(3) では，0 のカードを引く人が 4 枚のカードを引き，0 のカードを引かない人が 3 枚のカードを引くことに着目します．

解答

0, 1, 2 のカードをそれぞれ $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ で表すこととする．

(1) $X=1$ となるのは，A が $\boxed{1}$ を引いて，次に B が $\boxed{1}$ または $\boxed{2}$ を引き，3 回目に A が $\boxed{0}$ を引けばよい．よって，求める確率は，

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{1}{14}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $X=2$ となるのは，次のようにカードを引く場合である．

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目		
A	B	A	B	A		
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{140}$
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{140}$
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{70}$
$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$			→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{70}$
$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$			→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{70}$

ゆえに，求める確率は，

$$\frac{1}{140}+\frac{1}{140}+\frac{1}{70}+\frac{3}{70}+\frac{2}{70}=\mathbf{\frac{1}{10}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3) $\boxed{0}$ を引いた人は，ゲーム終了までにカードを 4 枚引き，$\boxed{0}$ を引かなかった人は，ゲーム終了までにカードを 3 枚引く．B が $\boxed{0}$ を引くとき，B が $\boxed{0}$ を引く可能性があるのは 2 回目，4 回目，6 回目である．それぞれにおいて，Y の最大値は，0, 2, 4 であり，$Y=5$ となることはない．よって，$Y=5$ となるのは，B が $\boxed{1}$ を 1 回，$\boxed{2}$ を 2 回引くときだけである．7 回の試行でのカードの取り出し方は，7 枚のカードをすべて区別すると $7!$ 通りある．B のカードの取り出し方は，取り出す順序を考慮して，

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot 3! = 54\ (\text{通り})$$

A のカードの取り出し方は，残り 4 枚であるから，順序を考慮して，

$$4! = 24\ (\text{通り})$$

ゆえに，求める確率は，

$$\frac{54 \cdot 24}{7!} = \boldsymbol{\frac{9}{35}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

解説

(1), (2) の解答では，$\boxed{0}$ を引いた後は，A の得点に影響が出ないため，それ以降のことは考えずに計算をしましたが，7 枚のカードすべてを引いてゲームが終了するまでを考えると次のようになります．

(1) は，1 回目に A が $\boxed{1}$，2 回目に B が $\boxed{0}$ 以外，3 回目に A が $\boxed{0}$ を引くときである．4 回目以降は，2 人がどのカードを引いても A の得点に影響はない．したがって，

$$\frac{3 \cdot 1 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{14}$$

(2) は，次の 2 通りが考えられる．

(i) 1 回目に A が 2，3 回目に A が 0 を引く．

(ii) 1 回目に A が 1，3 回目に A が 1，5 回目に 0 のカードを引く．

ゆえに，(1) と同様に考えて，

$$\frac{3 \cdot 1 \cdot 5! + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{10}$$

(3) は，$\boxed{0}$ を引く人が 4 枚のカードを引き，$\boxed{0}$ を引かない人が 3 枚のカードを引きます．つまり，B が $\boxed{0}$ のカードを引くと $Y=5$ とならないことをまず述べておきます．A は，どのタイミングで $\boxed{0}$ を引いても構いません．注意したいのは，同じ数字のカードでもすべて区別して並べなければいけないため，A が 4 枚のカードを引くとき，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ を並べますが，区別をして考えるので，並べ方は $4!$ とします．$\dfrac{4!}{2!}$ としないようにしましょう．