20 （′14　東京工業大） 【難易度】 … 標準

点 $\mathrm{P}(t,\,s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

（1） 点 $\mathrm{Q}(x,\,y)$ の座標を，t を用いて表せ．

（2） 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

（3） 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，原点まわりの回転を考えるため複素数を活用します．(3) は，体積計算の基本に戻って計算する方法とバウムクーヘン積分で計算する方法があります．

♣ ♠

解答

（1） 点 $\mathrm{P}(t,\,s)$ を複素数平面上の点に置き換えるとき，$z=t+si$ と表すことができる．この点を原点のまわりに 45° 回転するので，回転後の複素数を w とすると，

$$
\begin{aligned}
w&=z(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\\
&=(t+si)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+si)(1+i)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{t-s+(t+s)i\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$s=\sqrt{2}t^2-2t$ であるから，

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{t-\left(\sqrt{2}t^2-2t\right)+\left(t+\sqrt{2}t^2-2t\right)i\right\}\\
&=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)+\left(t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)i
\end{aligned}
$$

ゆえに，xy 平面に戻せば求める点 Q の座標は，

$$\mathbf{Q}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\,,\quad t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） (1) より，曲線 C の y 座標は $y=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ であるから，直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつためには，

$$t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t=a\quad\Longleftrightarrow\quad t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t-a=0$$

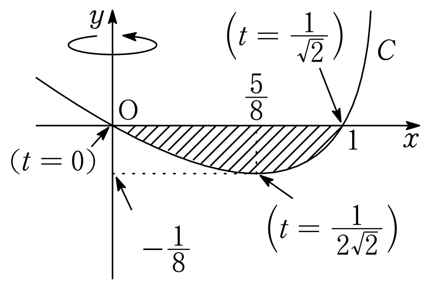
がただ 1 つの実数解をもてばよい．ゆえに，判別式を D とすると，

$$D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4(-a)=0\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{8}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（3） 曲線 C と x 軸との共有点を求める．$y=0$ として，

$$t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t=0\quad\Longleftrightarrow\quad t\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

よって，$t=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，このとき $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}t-t^2$ より，x の値はそれぞれ $x=0,\,1$ である．ゆえに，曲線 C と x 軸との交点は，$(0,\,0),\,(1,\,0)$ である．また，$y=-\dfrac{1}{8}$ のとき，(2) より，$t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である．



曲線 C の概形は右図のようになるので，曲線 C と直線 $y=k\ \left(-\frac{1}{8}<y\leqq 0\right)$ との交点の x 座標を x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ とすると，回転体を平面 $y=k$ で切ったときの切断面の面積 S は,

$$S=\pi {x_2}^2-\pi {x_1}^2$$

と表すことができる．ゆえに，求める体積 V は,

$$\begin{aligned}
V&=\int_{-\frac{1}{8}}^{0}(\pi {x_2}^2-\pi {x_1}^2)\,dk\\
&=\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi {x_2}^2\frac{dk}{dt}\,dt-\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}\pi {x_1}^2\frac{dk}{dt}\,dt\\
&=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi x^2\frac{dk}{dt}\,dt\\
&=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)^2\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt\\
&=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2t^5-\frac{13\sqrt{2}}{2}t^4+12t^3-\frac{9\sqrt{2}}{4}t^2\right)dt\\
&=\pi\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{13\sqrt{2}}{10}t^5+3t^4-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\
&=\pi\left(\frac{1}{24}-\frac{13}{40}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{11}{120}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は，原点まわりに点を移動させるため複素数平面を用いました．行列を学習している人は，行列を用いて計算することもできます．(2) は，(3) を解くためのヒントになっています．(3) は，回転体の切り口の面積を積分するという教科書通りの計算方法で体積を求めていますが，バウムクーヘン積分（証明は割愛します）を用いると次のように計算することもできます．置換積分法を用いて変数を t にして計算します．計算は割愛します．

別解

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^1 2\pi x(-y)\,dx\\
&=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)\left(-t^2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2t\right)dt=\cdots\cdots=\boldsymbol{\frac{11}{120}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

【バウムクーヘン積分】

右図のような関数 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，次のように求めることができる．

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$