19 （′14　神戸大） 【難易度】 … 標準

空間において，原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

（2） OA = OB = OC のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ．

【テーマ】：空間ベクトル

方針

(1) は，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ であることを用います．(2) は，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ が垂直であることを示します．

♣ ♠

解答

（1） $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ であるから，始点を O に変換すると，

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） **【証明】**

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ とおくと，(1) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ との内積を考える．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=2\left(\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\right)\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ であるから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0 &\iff \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=0\\&\iff \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

題意より，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$ であるから，

② より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

①, ③ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 α に対して垂直であることが示された．

（証明終）

解説

(1) は，4 点 A, B, C, D の関係式を作って始点を O に変換すれば目的の式が得られると考えます．

(2) は，一般に平面に垂直なベクトル $\vec{n}$ は，平面上の 1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と垂直になります．すなわち，平面 α と垂直であることを示すためには，$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ かつ $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ であることを示せばよいのです．本問を解くポイントは，四角形 ABCD が正方形であることから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を利用することです．これは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ でも構いませんが，(1) の結果を使えば D は消去できるので，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを用いてあらかじめ D を使わない式を作る方がよいでしょう．なお，本問で正方形の 1 辺の長さが 1 と与えられていますが，この条件は問題を解く際は不要です．