18 ('07 信州大) **【難易度】** … 標準

$a,\, b$ が実数の範囲を動くとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ の最小値を求めよ．また，そのときの $a,\, b$ の値を求めよ．

【テーマ】：定積分の最大・最小

方針

定積分を計算すると $a,\, b$ に関する 2 変数関数になるので，平方完成を利用して最小値を求めます．

♣ ♠

解答

$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ とおくと，

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\sin^2x+b^2\cos^2x-2ax\sin x-2bx\cos x+2ab\sin x\cos x)\,dx$$

である．ここで，

$x^2,\, \sin^2x,\, \cos^2x,\, x\sin x$ は偶関数，$x\cos x,\, \sin x\cos x$ は奇関数

であるから，

$$I=2\int_0^{\pi}(x^2+a^2\sin^2x+b^2\cos^2x-2ax\sin x)\,dx$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx&=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\\\int_0^{\pi}\cos^2x\,dx&=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\\\int_0^{\pi}x\sin x\,dx&=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\\&=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi\\\int_0^{\pi}x^2\,dx&=\left[\,\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\pi^3\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}I&=2\left(\frac{1}{3}\pi^3+\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2-2a\pi\right)\\&=\pi(a^2-4a)+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi(a-2)^2+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\end{aligned}$$

となる．よって，I は，

$a=2,\, b=0$ のとき，最小値 $\dfrac{2}{3}\pi^3-4\pi$……（答）

をとる．

♢ ♡

解説

定積分の最大値・最小値を求める問題で，計算問題としてしばしば出題されています．与えられた定積分を素直に計算して最小値を求めますが，a, b の 2 変数関数になるため，2 変数関数の最小値を求める術を知らなければ後半は難しく感じるかもしれません．しかし，経験があれば基本的な問題に見えるでしょう．本問は，積分区間が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ なので，偶関数と奇関数に着目することで計算量を減らすことができます．

【奇関数と偶関数】

奇関数と偶関数に関する基本事項をまとめておこう．

関数 $y = f(x)$ に対して，

(i) $f(x)$ が**奇関数**ならば，　$f(-x) = -f(x)$　**原点対称である関数**

(ii) $f(x)$ が**偶関数**ならば，　$f(-x) = f(x)$　**y 軸対称である関数**

が成り立つ．

【偶関数と奇関数の定積分】

$f(x)$ を奇関数，$g(x)$ を偶関数とする．a を正の定数とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$$