17 （′15　富山大） 【難易度】 … 標準

数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2} \\ a_n > 0,\quad a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

（1） $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

（2） $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

（3） $10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

【テーマ】：隣接二項間漸化式

方針

(1) は，$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ として考えます．(2) は，与えられた式を c_n と a_n で表し，底を 2 とする対数をとって (1) を用います．(3) は，(2) の結果を利用して計算します．

♣ ♠

解答

（1） $a_n > 0$ であるから，与えられた等式の両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = \log_2 8$$

$$\frac{1}{n}\log_2 a_1 + \frac{1}{n}\log_2 a_2 + \cdots + \frac{1}{n}\log_2 a_{n-1} + \frac{2}{n}\log_2 a_n = 3$$

$$\frac{1}{n}(\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_{n-1} + \log_2 a_n) + \frac{1}{n}\log_2 a_n = 3$$

$$\frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n) + \frac{1}{n}b_n = 3$$

ここで，$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ とおくと，

$$\frac{1}{n}S_n + \frac{1}{n}b_n = 3 \iff S_n + b_n = 3n \cdots\cdots ①$$

よって，$S_{n+1} + b_{n+1} = 3(n+1)$ …… ② が成り立つので，② − ① より，

$$S_{n+1} - S_n + b_{n+1} - b_n = 3 \iff b_{n+1} + b_{n+1} - b_n = 3 \iff b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

を得る．これを変形すると，

$$b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$$

となるので，数列 $\{b_n - 3\}$ は初項 $b_1 - 3 = \log_2 a_1 - 3 = -\frac{3}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である．よって，

$$b_n - 3 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \iff \boldsymbol{b_n = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） 与式より，

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n)^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{1}{n}} = 8 \iff (c_n)^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{1}{n}} = 8 \iff c_n a_n = 8^n$$

であるから，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 c_n + \log_2 a_n = 3n \iff \log_2 c_n = 3n - b_n$$

(1) より,

$$\log_2 c_n = 3n - 3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

であるから,

$$\boldsymbol{c_n = 2^{3\left\{n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) $10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ の各辺に底が 2 の対数をとると,

$$\log_2 10^k \leqq \log_2 c_{11} < \log_2 10^{k+1}$$

$$k\log_2 10 \leqq 30 + \frac{3}{2^{11}} < (k+1)\log_2 10 \quad \Longleftrightarrow \quad k \leqq \left(30+\frac{3}{2^{11}}\right)\frac{1}{\log_2 10} < k+1$$

であるから, $\dfrac{1}{\log_2 10} = \log_{10} 2$ であることを用いると,

$$\left(30+\frac{3}{2^{11}}\right)\log_{10} 2 - 1 < k \leqq \left(30+\frac{3}{2^{11}}\right)\log_{10} 2 \cdots\cdots ③$$

となる．ここで,

$$\left(30+\frac{3}{2^{11}}\right)\log_{10} 2 = \left(30+\frac{3}{2^{11}}\right)\times 0.3010 = 9.03 + \frac{0.9030}{2^{11}} \fallingdotseq 0.903$$

であるから, ③ を満たす整数 k の値は, $\boldsymbol{k=9}\cdots\cdots$**(答)**

◇ ♡

解説

誘導が丁寧なので, 比較的方針が立て易い問題ですが, (1) で $S_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$ をおき, $S_{n+1}-S_n = b_{n+1}$ を用いるということに気がつかなければ先に進めません．計算力の必要な問題ではありますが, 漸化式に関する経験が必要な問題なので, 演習不足では完答できません．

(1) は, $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ とおいて考えることがポイントになります．数列 $\{b_n\}$ に関する隣接二項間漸化式が導ければあとは解けないといけません．(2) は $c_n a_n = 8^n$ という式まで変形できれば, (1) の結果を用いるため, 両辺に底が 2 の対数をとります．積 → 和に変換するには対数を利用することがポイントです．(3) では, $\dfrac{3}{2^{11}}$ を計算する必要はなく, $9.03 + \dfrac{0.9030}{2^{11}} \fallingdotseq 9.03$ であることに気がつけば容易に k の値を求めることができるでしょう．