15 （'97　大阪大） 【難易度】 … 標準

点 $\mathrm{P}(x,\,y)\ (x>0)$ は，曲線 $y=x^3$ 上の点とする．P を通るこの曲線の 2 本の接線が x 軸と交わる点を A, B とし，$\angle \mathrm{APB}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

(1)　$\cos\theta$ を x を用いて表せ．

(2)　$\tan\theta$ が最大となる x の値を求めよ．

【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

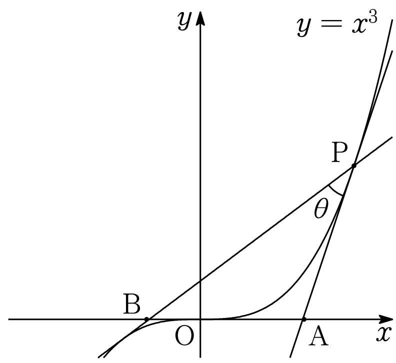
点 P を通る接線は 2 本あるので，その方程式を求めてなす角を計算します．$\tan\theta$ の最大値は，(1) で求めた $\cos\theta$ の値から $\tan\theta$ を求めれば分数式になるため，相加平均・相乗平均の関係を用いて最大値を求めます．等号成立条件が，求めたい x の値になります．

♣ ♠

解答

(1)　$y'=3x^2$ であるから，接点を $(t,\,t^3)$ とすれば，この点における接線の方程式は，

$$Y=3t^2(X-t)+t^3 \iff Y=3t^2X-2t^3$$



となる．これが点 $\mathrm{P}(x,\,x^3)$ を通るので，

$$x^3=3t^2x-2t^3 \iff 2t^3-3t^2x+x^3=0$$
$$\iff (t-x)^2(2t+x)=0$$

よって，$t=x,\,-\dfrac{x}{2}$ を得る．ゆえに，2 本の接線の方程式は，

$$\begin{cases} Y=3x^2X-2x^3 & \cdots\cdots ① \\ Y=\dfrac{3}{4}x^2X+\dfrac{x^3}{4} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$Y=0$ とすれば，① のとき，$X=\dfrac{2}{3}x$，② のとき，$X=-\dfrac{x}{3}$ となる．ゆえに，$\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3}x,\,0\right)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{x}{3},\,0\right)$ とおくことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(-\dfrac{1}{3}x,\,-x^3\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(-\dfrac{4}{3}x,\,-x^3\right)$ より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=\frac{\dfrac{4}{9}x^2+x^6}{\sqrt{\dfrac{1}{9}x^2+x^6}\sqrt{\dfrac{16}{9}x^2+x^6}}=\boldsymbol{\frac{9x^4+4}{\sqrt{(9x^4+1)(9x^4+16)}}}\ \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であり，$\tan\theta>0$ であるから，

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\frac{(9x^4+1)(9x^4+16)}{(9x^4+4)^2}-1}$$
$$=\frac{9x^2}{9x^4+4}=\frac{9}{9x^2+\dfrac{4}{x^2}}$$

$x^2>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係から，

$$9x^2+\frac{4}{x^2}\geqq 2\sqrt{9x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=2\sqrt{36}=12$$

よって，

$$\tan\theta = \frac{9}{9x^2 + \frac{4}{x^2}} \leqq \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

等号は，$9x^2 = \dfrac{4}{x^2}$ かつ $x > 0$ すなわち $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき成立する．ゆえに，求める x の値は，

$$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$ ……(**答**)

◇ ♡

解説

(1) は，様々な方法で求めることができます．解答では A, B の座標を求めましたが，座標を求めなくても接線の方向ベクトルを考えることで $\cos\theta$ の値を求めることができます．

別解

①, ② の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とすると，

$$\vec{a} = (1,\ 3x^2),\quad \vec{b} = (4,\ 3x^2)$$

である．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ なので，

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4 + 9x^4}{\sqrt{1+9x^4}\sqrt{16+9x^4}} = \boldsymbol{\frac{9x^4+4}{\sqrt{(9x^4+1)(9x^4+16)}}}$$ ……(**答**)

である．

ある直線 ℓ があって，その傾きが k であれば，その方向ベクトル $\vec{a}$ は，$\vec{a} = (1,\ k)$ となります．これは図を考えてみれば明らかです．別解の $\vec{b}$ は，成分が整数となるように x 座標の値と y 座標の値を 4 倍しています．ベクトルなので，$\left(1,\ \dfrac{3}{4}x^2\right) /\!/ (4,\ 3x^2)$ となります．分数式の最大値や最小値を求めたいときは，文字が正であることに着目して，相加平均・相乗平均の関係が使えるかどうかを考えることが大切です．